
Universidade Federal de Santa Catarina

Curso de Graduação em Matemática

Introdução aos Grupos de Lie e às Variedades Diferenciáveis

por

Conrado Damato de Lacerda

sob a orientação de

Dr. Eliezer Batista

*Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Graduação em Matemática da
Universidade Federal de Santa Catarina
para a obtenção do título de Bacharel em
Matemática e Computação Científica*

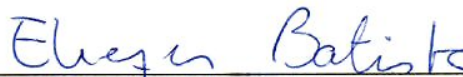
Florianópolis, 3 de dezembro de 2007

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no curso de Matemática - Habilitação Bacharelado em Matemática e Computação Científica, e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria nº 52/CCM/07.



Profª Carmem Suzane Comitre Gimenez
Professora da disciplina

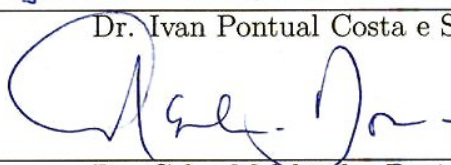
Banca Examinadora:



Dr. Eliezer Batista (Orientador)



Dr. Ivan Pontual Costa e Silva



Dr. Celso Melchhiades Doria

Resumo

O objetivo deste trabalho é discutir os fundamentos da Teoria dos Grupos de Lie. Em primeiro lugar, analisamos cuidadosamente uma classe especial de grupos, a dos lineares, e para ela apresentamos diversos resultados que, mais tarde, serão generalizados para o contexto mais amplo. Em seguida, damos uma introdução suficientemente auto-contida a respeito de variedades diferenciáveis para que possamos, por fim, apresentar os Grupos Lie e estudar as suas propriedades básicas. Dois apêndices são fornecidos ao final do trabalho: um sobre o Teorema da Função Inversa, e o outro sobre Álgebras de Lie abstratas.

Agradecimentos

Gostaria de dedicar algumas linhas para agradecer às pessoas que, ao longo dos últimos anos, mostraram o seu apoio à minha escolha de carreira profissional e que exerceram (e exercem) grande influência sobre mim, como futuro matemático e como ser humano.

Aos meus pais, José e Lígia, por sempre me oferecerem as condições necessárias e o apoio incondicional para o desenvolvimento das minhas aptidões e afinidades.

Aos meus avós, tantos para citar, com quem sempre aprendi muito. Em especial, ao meu avô Roberto Mündell de Lacerda, que quando contei que resolvera estudar Matemática exclamou: “Que inveja!”.

Ao meu primo Fernando, que me mostrou, pela primeira vez, o que era a Matemática.

À Andréa, de quem sou primo.

Aos meus amigos e colegas, especialmente ao Leonardo e à Monique.

A todos os professores com quem estudei; em especial, aos professores Gustavo Adolfo Torres Fernandes da Costa, Eliezer Batista (que orientou meus estudos durante três dos quatro anos do curso), Oscar Ricardo Janesch e Ruy Exel Filho pelo papel de destaque que tiveram na minha formação.

Às professoras Carmem Suzane Comitre Gimenez, por coordenar o Curso de Matemática de maneira impecável, e Elisa Zunko Toma, por ser uma das principais culpadas por eu ter escolhido a carreira da Matemática.

Aos funcionários da Secretaria do Curso de Matemática, em especial à Silvia e à Iara, e do Departamento de Matemática.

Sumário

Introdução	i
Notação e Terminologia	iii
1 Grupos Lineares	1
1.1 A Função Exponencial e EDOs Lineares	1
1.2 O Logaritmo de Operadores	10
1.3 Grupos Lineares e suas Álgebras de Lie	16
1.4 Um Teorema Fundamental	26
1.5 A Representação Adjunta de um Grupo Linear	31
1.6 A Diferenciabilidade de \exp	36
1.7 Exemplos	41
$SL(2, \mathbb{R})$	41
$SO(3)$	44
$SU(2)$	49
O Referencial de Frenet	55
2 Variedades Diferenciáveis	57
2.1 Estruturas Diferenciáveis	57
2.2 Funções Diferenciáveis e Vetores Tangentes	67
2.3 O Fibrado Tangente e Campos Vetoriais	79
2.4 A Diferencial de uma Aplicação	90
Curvas Suaves	98
2.5 Mais Sobre Campos Vetoriais	100
3 Grupos de Lie	105
3.1 Definições e Exemplos	105
3.2 A Álgebra de Lie de um Grupo de Lie	111
3.3 De Volta aos Grupos Lineares	122
Considerações Finais	129
A O Teorema da Função Inversa	131
B Álgebras de Lie	139
Referências	151

Lista de Figuras

2.1	A projeção estereográfica.	58
2.2	Transição de cartas.	60
2.3	Aplicação diferenciável entre variedades.	68
2.4	Demonstração do lema 2.2.9.	69
2.5	Um campo vetorial numa variedade.	80
3.1	O transporte de X_g por $d(L_{hg^{-1}})$	112

Introdução

“Symmetry, as wide or narrow as you may define its meaning, is one idea by which man through the ages has tried to comprehend and create order, beauty, and perfection.”

Hermann Weyl

Houve, durante o século XIX, um grande avanço em muitas áreas da Matemática, das quais destacamos a Geometria e a teoria das Equações Diferenciais. Uma técnica que se mostrou muito eficaz nestes ramos foi o estudo de grupos de transformações, em particular das *simetrias*. Grosso modo, uma simetria é uma transformação num determinado espaço que preserva alguma propriedade de interesse, como distância e área.

Um dos principais defensores do estudo dos grupos de simetria na Geometria foi o matemático alemão Felix Klein (1849-1925). Ele propôs que o estudo da Geometria é o estudo de grupos de simetria, o que se conhece como Programa de Erlangen. Adotando este ponto de vista, podemos considerar, por exemplo, a Geometria Euclideana como o estudo do grupo das isometrias de \mathbb{R}^n .

Com relação às Equações Diferenciais, o processo ocorreu de maneira diferente. Estudaram-se, em vez de grupos de simetria, pseudo-grupos de transformações determinados por equações diferenciais, com o objetivo de obter para estas equações resultados semelhantes aos encontrados na Teoria de Galois. Para ilustrar melhor a idéia dos pseudo-grupos, vejamos um exemplo:

Seja X o conjunto das funções $f : U_f \rightarrow V_f$, com U_f e V_f subconjuntos abertos e não-vazios de \mathbb{C} , que são holomorfas, bijetivas e cujas inversas também são holomorfas. Dadas $f, g \in X$, quando $V_f \cap U_g \neq \emptyset$, podemos definir

$$g \circ f : f^{-1}(V_f \cap U_g) \longrightarrow g(V_f \cap U_g),$$

e é fácil ver que $g \circ f \in X$. Esta operação define uma estrutura de *pseudo-grupo* em X . Este pseudo-grupo está associado às Equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\Re}}{\partial x} &= \frac{\partial f_{\Im}}{\partial y} \\ \frac{\partial f_{\Re}}{\partial y} &= -\frac{\partial f_{\Im}}{\partial x}, \end{aligned}$$

em que f_{\Re} denota a parte real de f e f_{\Im} , a imaginária.

Esta teoria é fruto do trabalho do matemático norueguês Sophus Lie (1842-1899), e modernamente é conhecida como Teoria de Lie. As descobertas de Lie incluem as álgebras de Lie associadas a esses grupos e as relações fundamentais entre os dois, assim como muitas questões de representação.

Nas décadas que seguiram a morte de Lie, diversos matemáticos de renome deram continuidade ao seu trabalho, entre os quais podemos citar: Élie Cartan, Hermann Weyl, John von Neumann e Claude Chevalley. Atualmente, a Teoria de Lie é reconhecida como uma das áreas fundamentais da Matemática, e seus resultados são aplicados na resolução dos mais variados problemas, desde Álgebra abstrata até Engenharia e Física Experimental.

Propomos, neste trabalho, oferecer uma introdução à teoria dos Grupos de Lie, usando como ponto de partida os grupos lineares. Além da própria natureza de Trabalho de Conclusão de Curso, esperamos que este texto auxilie os alunos que resolverem estudar este assunto.

Adotamos como referências básicas os textos (ROSSMANN, 2002) e (HALL, 2003) para a teoria dos grupos lineares, (LEE, 2003) para a teoria de variedades diferenciáveis e grupos de Lie abstratos, e (SAN MARTIN, 1999) para o apêndice sobre Álgebras de Lie.

Notação e Terminologia

Antes de começar o nosso trabalho, gostaríamos de esclarecer alguns pontos a respeito de notação e terminologia.

- O termo *diferenciável* significa, a menos que se diga o contrário, *de classe* C^∞ . Quando quisermos especificar alguma classe de diferenciabilidade particular, faremos isso explicitamente.
- Dada uma função diferenciável f , sua diferencial em um ponto x do domínio é denotada por df_x .
- Dado um espaço métrico M , que neste trabalho são espaços vetoriais reais ou complexos munidos de normas, para cada $x \in M$ e cada $r > 0$ denotamos

$$B(x, r) := \{y \in M : d(x, y) < r\}$$

a *bola aberta* e

$$\overline{B(x, r)} := \{y \in M : d(x, y) \leq r\}$$

a *bola fechada*. Caso queiramos usar bolas de um subespaço N de M (como ocorre nos capítulos 1 e 3), denotaremos-las por

$$B_N(x, r), \overline{B_N(x, r)}.$$

- O termo *vizinhança* de um ponto ou um conjunto significa um conjunto aberto que o contém, exceto nos poucos casos em que fica claro do contexto que, na verdade, o ponto ou conjunto está contido no interior.
- Dado um espaço vetorial E qualquer, $\mathcal{L}(E)$ denota o espaço dos operadores lineares $T : E \rightarrow E$. Além disso, o *dual* (algébrico) de E , que é o espaço dos funcionais lineares $f : E \rightarrow \mathbb{K}$, é denotado por E^* .

Capítulo 1

Grupos Lineares

Uma das classes mais importantes de grupos de Lie é a dos grupos lineares, que são grupos formados por operadores lineares invertíveis em algum espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita. Esta importância provém, principalmente, do fato de que os elementos destes grupos podem ser considerados como matrizes, o que facilita grandemente o seu estudo.

Apesar de introduzirmos o conceito de grupo de Lie apenas no terceiro capítulo — tarefa que exige familiaridade com as variedades diferenciáveis —, muitos resultados a respeito dos grupos lineares podem ser obtidos usando pouco mais do que Cálculo e Álgebra Linear e pode-se facilmente aplicá-los à descrição e resolução de problemas. Ademais, a estrutura relativamente simples dos grupos lineares motivou, inclusive, o desenvolvimento da Teoria de Representações, que visa reduzir o estudo dos grupos de Lie gerais ao dos grupos lineares.

Neste capítulo, fazemos um estudo detalhado dos grupos lineares, visando também a construção — feita no capítulo 3 — de estruturas diferenciáveis que os torne grupos de Lie.

1.1 A Função Exponencial e EDOs Lineares

Usaremos, nas demonstrações de diversos resultados, uma técnica que envolve resolver equações diferenciais ordinárias de um tipo especial. Apresentamos nesta seção as principais ferramentas necessárias à compreensão deste método.

Seja E um espaço vetorial real ou complexo, normado e de dimensão finita.¹ O problema considerado é resolver a EDO

$$\dot{\gamma} = X \circ \gamma, \tag{1.1.1}$$

em que X é um operador linear em E . Uma *solução* para esta equação é uma curva $\gamma : J \rightarrow E$ de classe \mathcal{C}^1 , com $J \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto, tal que

$$\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t)), \quad \forall t \in J.$$

¹O Cálculo Diferencial em tais espaços é feito de maneira semelhante ao do \mathbb{R}^n .

Vale a pena observar que, se γ é uma tal solução, então γ é de classe \mathcal{C}^∞ , pois, indutivamente,

$$\gamma^{(k)} = X \circ \gamma^{(k-1)}, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*.$$

Por causa disso, diremos apenas que γ é *diferenciável*, ou *suave*.

Uma das técnicas mais comuns para se resolver (1.1.1) é assumir que γ é analítica, isto é, que para cada $t_0 \in J$ existe $I \subseteq J$ um aberto com $t_0 \in I$ e tal que $\forall t \in I$

$$\gamma(t) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t - t_0)^k,$$

com $p_k \in E$ a serem determinados. Deste modo, diferenciando esta série de potências termo-a-termo, a equação (1.1.1) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t - t_0)^{k-1} &= X \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_k(t - t_0)^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} X(p_k)(t - t_0)^k; \end{aligned}$$

a segunda igualdade segue do fato de que todo operador linear entre espaços de dimensão finita é contínuo. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} k p_k(t - t_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) p_{k+1}(t - t_0)^k,$$

temos que (1.1.1) é equivalente a

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1) p_{k+1}(t - t_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} X(p_k)(t - t_0)^k.$$

Igualando os termos das duas séries, temos $\forall k \in \mathbb{N}$

$$(k+1)p_{k+1} = X(p_k) \Rightarrow p_{k+1} = \frac{1}{k+1} X(p_k).$$

Esta equação nos fornece uma recursão que podemos usar para obter os coeficientes p_k , $k \geq 1$, a partir de p_0 :

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{1}{k} X(p_{k-1}) \\ &= \frac{1}{k} X \left(\frac{1}{k-1} X(p_{k-2}) \right) \\ &= \frac{1}{k(k-1)} X^2(p_{k-2}) \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{k!} X^k(p_0). \end{aligned}$$

Observe que, convencionando que $0! = 1$ e que $X^0 = \text{id}_E$, esta equação também vale para $k = 0$. Logo,

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k(p_0)(t - t_0)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [(t - t_0)X]^k(p_0) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [(t - t_0)X]^k \right)(p_0),\end{aligned}$$

assumindo, é claro, que esta série de operadores converge. Denotando

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [(t - t_0)X]^k = e^{(t-t_0)X},$$

motivados pelo Cálculo elementar, do raciocínio acima temos

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)X}(p_0), \quad \forall t \in I.$$

Esta resolução, apesar de bastante informal, motiva o trabalho que faremos a seguir: dados $X \in \mathcal{L}(E)$, $p_0 \in E$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, mostraremos que o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{\gamma} &= X \circ \gamma \\ \gamma(t_0) &= p_0 \end{cases}$$

admite uma única solução em toda a reta, e ela é dada por

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)X}(p_0).$$

O primeiro passo é mostrar que, para todo $T \in \mathcal{L}(E)$, a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k \tag{1.1.2}$$

converge em $\mathcal{L}(E)$. Para tanto, considere a norma em $\mathcal{L}(E)$ dada por

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Sendo $\mathcal{L}(E)$ um espaço de dimensão vetorial de finita, ele é completo com relação à norma definida acima — e qualquer outra, na verdade. Mais informações podem ser vistas em (KREYSZIG, 1989) e (LIMA, 2004).

Portanto, para mostrar que a série em (1.1.2) converge, é suficiente verificar que ela converge absolutamente. De fato, para cada $N \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^N \left\| \frac{1}{k!} T^k \right\| &= \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \|T^k\| \leq \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \|T\|^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|T\|^k = e^{\|T\|},\end{aligned}$$

e disso segue que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{k!} T^k \right\| \leq e^{\|T\|} < \infty.$$

Definição 1.1.1. A aplicação $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ que a cada $T \in \mathcal{L}(E)$ associa o operador

$$e^T := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k \in \mathcal{L}(E)$$

é chamada de função exponencial.

Exemplo 1.1.2. Seja $T \in \mathcal{L}(E)$ um operador diagonalizável, isto é, para o qual existe uma base $\beta = (v_1, \dots, v_n)$ de E tal que

$$T(v_i) = \lambda_i v_i,$$

com $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. É fácil ver que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$T^k(v_i) = \lambda_i^k v_i,$$

de modo que

$$\begin{aligned} e^T(v_i) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k(v_i) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_i^k \cdot v_i \\ &= e^{\lambda_i} \cdot v_i. \end{aligned}$$

Como isso vale $\forall i$, concluimos que e^T é diagonalizável com relação a β e seus autovalores são $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$. Em termos de matrizes,

$$[T]_{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow [e^T]_{\beta} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & \\ & e^{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

△

Esse exemplo mostra também que, se $D(E)$ é o subconjunto de $\mathcal{L}(E)$ composto dos operadores diagonalizáveis, então $\exp(D(E)) \subseteq D(E)$. No entanto, a inclusão recíproca não é válida, pois se $T \in D(E)$ possui um autovalor nulo (como, por exemplo, $T = 0$), então $T \notin \exp(D(E))$.

Seja $GL(E)$ o conjunto dos operadores lineares invertíveis no espaço E . Sabemos, da Álgebra Linear, que $GL(E)$ é um grupo com a operação de composição, chamado de *grupo linear geral*. Mostraremos, ainda nesta seção, que e^T é invertível para todo $T \in \mathcal{L}(E)$, ou seja, que $\exp(\mathcal{L}(E)) \subseteq GL(E)$. Portanto, se $S \in \mathcal{L}(E) \setminus GL(E)$, então não existe $T \in \mathcal{L}(E)$ tal que $S = e^T$. Mais

adiante neste capítulo, veremos também que, mesmo quando $S \in GL(E)$, pode ocorrer que $S \notin \exp(\mathcal{L}(E))$.

Estas questões nos são de grande interesse, pois, quando formos construir a estrutura diferenciável de um grupo linear no capítulo 3º, a invertibilidade local de \exp será crucial. Além disso, muitas propriedades geométricas destes grupos são estudadas através da função exponencial.

Voltando à questão de resolver a EDO

$$\begin{cases} \dot{\gamma} &= X \circ \gamma \\ \gamma(t_0) &= p_0, \end{cases} \quad (1.1.3)$$

para mostrar que $\gamma(t) = e^{(t-t_0)X}(p_0)$ é solução, precisamos, antes, de uma maneira de calcular $\dot{\gamma}$.

Lema 1.1.3. *Dado $X \in \mathcal{L}(E)$, a curva*

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto e^{tX} \in \mathcal{L}(E)$$

é diferenciável e

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^m e^{tX} = X^r e^{tX} X^s,$$

para quaisquer $r, s \in \mathbb{N}$ tais que $r + s = m$.

Demonstração. Note que

$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tX)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!} t^k.$$

Denotando $X_k = \frac{X^k}{k!}$, temos

$$e^{tX} = \sum_{k=0}^{\infty} X_k t^k,$$

o que mostra que a curva em questão é uma função analítica. Portanto, ela é suave e podemos calcular suas derivadas diferenciando a série termo-a-termo. Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tX} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \left(\frac{X^k}{k!} t^k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{k!} k t^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X^k}{(k-1)!} t^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^{k+1}}{k!} t^k. \end{aligned}$$

Podemos, na expressão acima, fatorar X à esquerda ou à direita, do que segue

$$\frac{d}{dt} e^{tX} = X e^{tX} = e^{tX} X.$$

Isso mostra a identidade enunciada para $m = 1$. Os outros casos seguem por indução. \square

Corolário 1.1.4. *Dados $X \in \mathcal{L}(E)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $p_0 \in E$, a curva $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{(t-t_0)X}(p_0) \in E$ é diferenciável e satisfaz o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{\gamma} &= X \circ \gamma \\ \gamma(t_0) &= p_0. \end{cases}$$

Demonstração. A suavidade de γ é consequência imediata do lema, assim como:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \frac{d}{dt} e^{(t-t_0)X}(p_0) \\ &= X e^{(t-t_0)X}(p_0) \\ &= X(\gamma(t)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\dot{\gamma} = X \circ \gamma.$$

Além disso,

$$\gamma(t_0) = e^0(p_0) = p_0,$$

uma vez que $e^0 = \text{id}_E$. □

Portanto, a curva $\gamma(t) = e^{(t-t_0)X}(p_0)$ é, de fato, solução de (1.1.3); entretanto, para a unicidade, precisamos ver mais um resultado.

Proposição 1.1.5. *Dados $X, Y \in \mathcal{L}(E)$, são equivalentes:*

- (a) $XY = YX$;
- (b) $e^{sX}e^{tY} = e^{tY}e^{sX}$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$;
- (c) $e^{sX+tY} = e^{sX}e^{tY}$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. (a) \Rightarrow (c): Supondo que $XY = YX$, temos, para $s, t \in \mathbb{R}$, que

$$(sX + tY)^k = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} (sX)^i (tY)^j, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^{sX+tY} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (sX + tY)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} (sX)^i (tY)^j \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} (sX)^i (tY)^j \\ &= (\star) \end{aligned}$$

Como a série que define a exponencial converge absolutamente, podemos permutar suas parcelas livremente sem alterar a soma. Com isso,

$$\begin{aligned}
 (\star) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i!j!} (sX)^i (tY)^j \\
 &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (sX)^i \right] \cdot \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (tY)^j \right] \\
 &= e^{sX} e^{tY},
 \end{aligned}$$

como queríamos.

(c) \Rightarrow (b): Dados $s, t \in \mathbb{R}$, da hipótese (c) temos

$$e^{sX} e^{tY} = e^{sX+tY} = e^{tY+sX} = e^{tY} e^{sX}.$$

(b) \Rightarrow (a): Defina $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{L}(E)$ por

$$\begin{aligned}
 f(s, t) &= e^{sX} e^{tY} \\
 g(s, t) &= e^{tY} e^{sX}.
 \end{aligned}$$

De acordo com o lema 1.1.3, estas duas funções são diferenciáveis, e a hipótese (b) equivale a $f = g$. Portanto,

$$XY = \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(0, 0) = \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t}(0, 0) = YX. \quad \square$$

Corolário 1.1.6. Se $X, Y \in \mathcal{L}(E)$ são tais que $XY = YX$, então $e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X$.

Demonstração. Estas duas igualdades decorrem de (b) e (c) quando $s = t = 1$. \square

Corolário 1.1.7. Dado $X \in \mathcal{L}(E)$, temos $e^{(s+t)X} = e^{sX} e^{tX}$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Basta tomar, na proposição, $Y = X$, de modo que $XY = YX$ e vale (c). \square

Corolário 1.1.8. Para todo $X \in \mathcal{L}(E)$, temos que e^X é invertível e $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.

Demonstração. Seja $Y = -X$. Então, $XY = YX$, de modo que

$$e^Y e^X = e^X e^Y = e^{X+Y} = e^0 = \text{id}_E. \quad \square$$

Com base nesses resultados, podemos finalmente mostrar:

Teorema 1.1.9. *Sejam $X \in \mathcal{L}(E)$, $p_0 \in E$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Então, o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{\gamma} &= X \circ \gamma \\ \gamma(t_0) &= p_0 \end{cases}$$

admite uma única solução γ definida em toda a reta, dada por

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)X}(p_0).$$

Demonstração. Mostramos, no corolário 1.1.4, que γ assim definida é uma solução. Para mostrar a unicidade, seja $\tilde{\gamma}$ uma outra solução. Precisamos verificar que

$$\tilde{\gamma}(t) = e^{(t-t_0)X}(p_0), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

ou seja, que

$$e^{-(t-t_0)X}(\tilde{\gamma}(t)) = p_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Primeiro, observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{-(t-t_0)X}(\tilde{\gamma}(t)) &= -e^{-(t-t_0)X}X(\tilde{\gamma}(t)) + e^{-(t-t_0)X}(\dot{\tilde{\gamma}}(t)) \\ &= -e^{-(t-t_0)X}X(\tilde{\gamma}(t)) + e^{-(t-t_0)X}X(\tilde{\gamma}(t)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isso mostra que $e^{-(t-t_0)X}(\tilde{\gamma}(t))$ é constante. Por outro lado,

$$e^{-(t_0-t_0)X}(\tilde{\gamma}(t_0)) = \tilde{\gamma}(t_0) = p_0,$$

do que segue o resultado. □

A condição inicial exigida no teorema é $\gamma(t_0) = p_0$, e isso determina a curva:

$$\gamma(t) = e^{(t-t_0)X}(p_0).$$

Observe que

$$\gamma(t) = e^{tX}(e^{-t_0X}(p_0))$$

e que

$$\gamma(0) = e^{-t_0X}(p_0).$$

Logo, fazendo $\tilde{p}_0 = e^{-t_0X}(p_0)$, a curva γ é unicamente determinada por $\gamma(0) = \tilde{p}_0$, e esse é tipo de condição inicial que consideraremos de agora em diante. Formalizando essas idéias, temos o seguinte corolário:

Corolário 1.1.10. *Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow E$ uma curva suave tal que $\dot{\gamma} = X \circ \gamma$, para algum $X \in \mathcal{L}(E)$. Então, $\forall t \in \mathbb{R}$*

$$\gamma(t) = e^{tX}(\gamma(0)).$$

Corolário 1.1.11. *Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ uma curva suave tal que $\dot{\gamma} = X \cdot \gamma$, para algum $X \in \mathcal{L}(E)$. Então, $\forall t \in \mathbb{R}$*

$$\gamma(t) = e^{tX} \cdot \gamma(0).$$

Observação: A única diferença entre este corolário e o anterior é que o contradomínio da curva γ .

Demonstração. Considere a função $L_X : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ dada por $L_X(T) = XT$. É fácil ver que L_X é linear e que

$$\dot{\gamma} = L_X \circ \gamma.$$

Portanto, do corolário anterior decorre que

$$\gamma(t) = e^{tL_X}(\gamma(0)), \forall t \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado, como $(L_X)^k(T) = X^kT, \forall k \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} e^{tL_X}(\gamma(0)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (L_X)^k(\gamma(0)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k X^k \gamma(0) \\ &= e^{tX} \gamma(0), \end{aligned}$$

de modo que

$$\gamma(t) = e^{tX} \gamma(0), \forall t \in \mathbb{R}. \quad \square$$

Os próximos dois corolários para o teorema estabelecem uma estreita relação destes conceitos com a teoria que desenvolveremos ao longo dos próximos capítulos.

Corolário 1.1.12. *Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ uma curva suave tal que:*

- $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t), \forall s, t \in \mathbb{R};$
- $\gamma(0) = \text{id}_E;$
- $\dot{\gamma}(0) = X.$

Então, $\gamma(t) = e^{tX}, \forall t \in \mathbb{R}.$

Demonstração. Dado $t \in \mathbb{R}$, temos:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma(s+t) - \gamma(0+t)}{s} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma(s)\gamma(t) - \gamma(0)\gamma(t)}{s} \\ &= \left[\lim_{s \rightarrow 0} \frac{\gamma(s) - \gamma(0)}{s} \right] \gamma(t) \\ &= \dot{\gamma}(0)\gamma(t) \\ &= X\gamma(t). \end{aligned}$$

Portanto, podemos aplicar o corolário anterior para obter $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\gamma(t) = e^{tX} \gamma(0) = e^{tX},$$

como queríamos. □

Corolário 1.1.13. *Seja $\gamma : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (GL(E), \cdot)$ um homomorfismo de grupos diferenciável. Então, existe um único $X \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\gamma(t) = e^{tX}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Segue do fato de γ ser um homomorfismo que $\gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$, e que $\gamma(0) = \text{id}_E$. Portanto, tomando $X = \dot{\gamma}(0)$, temos que $\gamma(t) = e^{tX}$. Além disso, se $Y \in \mathcal{L}(E)$ é outro operador tal que $\gamma(t) = e^{tY}$, $\forall t \in \mathbb{R}$, então

$$X = \dot{\gamma}(0) = Y. \quad \square$$

1.2 O Logaritmo de Operadores

Nesta seção, mostraremos que $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow GL(E)$ é um homeomorfismo quando restrito a vizinhanças apropriadas de 0 e $e^0 = \text{id}_E$. Isso será feito construindo explicitamente uma inversa para \exp . Usaremos este resultado para provar uma propriedade importante a respeito de homomorfismos de grupos entre \mathbb{R} e $GL(E)$.

Ao longo de toda a seção, E denota um espaço *complexo* de dimensão finita; os resultados que mostraremos se aplicam naturalmente para o caso em que E é real.

Lema 1.2.1. *A função $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow GL(E)$ é contínua.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$B_n = \{X \in \mathcal{L}(E) : \|X\| \leq n\}.$$

Como B_n é fechado, $\forall n \in \mathbb{N}$, e $\mathcal{L}(E) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$, é suficiente mostrar que \exp é contínua em cada B_n . Fixado $n \in \mathbb{N}$, considere a sequência de funções $\{F_k : B_n \rightarrow \mathcal{L}(E)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dadas por

$$F_k(X) = \frac{1}{k!} X^k.$$

É imediato que F_k é contínua $\forall k$, e, além disso, $\forall X \in B_n$

$$\|F_k(X)\| = \left\| \frac{1}{k!} X^k \right\| \leq \frac{1}{k!} \|X\|^k \leq \frac{1}{k!} n^k.$$

Como $\sum_k \frac{1}{k!} n^k$ converge, pelo Teste M de Weierstrass temos que $\sum_k F_k$ converge uniformemente em B_n . Portanto, $\exp|_{B_n} = \sum_k F_k$ é contínua, o que completa a demonstração. \square

Para construir a inversa de \exp , primeiro considere o caso particular em que $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Neste caso, existe uma inversa $\log : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ para \exp dada por

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Vamos determinar a série de potências de \log numa vizinhança de 1. Note que

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{1 - (1 - t)},$$

de modo que, se $|1 - t| < 1$,

$$\frac{1}{t} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - t)^k.$$

Portanto, dado $x \in (0, 2)$, temos $|1 - x| < 1$ e

$$\begin{aligned} \log x &= \int_1^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (1 - t)^k \right) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_1^x (1 - t)^k dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{(1 - x)^{k+1}}{k + 1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (x - 1)^k. \end{aligned}$$

A idéia para a construção do logaritmo de operadores é estender a série acima para uma certa vizinhança de id_E em $\mathcal{L}(E)$ e mostrar que, nesta vizinhança, o logaritmo é a inversa de \exp . Como assumimos que E é um espaço complexo, o primeiro passo é fazer este trabalho no plano complexo. Assumimos, para isso, que o leitor tenha alguma familiaridade com os resultados de Análise Complexa. Mais detalhes podem ser vistos em (NETO, 1996).

Seja $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - 1| < 1$ e defina

$$\log z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (z - 1)^k.$$

Isso determina uma função holomorfa $\log : B(1, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, em que

$$B(1, 1) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}.$$

Lema 1.2.2. *Dado $z \in B(1, 1)$, temos que*

$$e^{\log z} = z.$$

Além disso, se $|z| < \log 2$, então $|e^z - 1| < 1$ e

$$\log e^z = z.$$

Observação: A exponencial de números complexos é definida, como na seção 1.1, ao considerarmos \mathbb{C} como um \mathbb{C} -espaço vetorial e $\mathbb{C} \simeq \mathcal{L}(\mathbb{C})$.

Demonstração. Para a primeira parte, observe que $\log z$ coincide com o logaritmo real para todo $z \in (0, 2)$, de modo que

$$e^{\log z} = z, \quad \forall z \in (0, 2).$$

Logo, \exp o \log é uma função analítica em $B(1, 1)$ que coincide com a identidade em $(0, 2)$, do que segue que $e^{\log z} = z, \forall z \in B(1, 1)$.

Para a segunda afirmação, observe que, se $|z| < \log 2$, então

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} |z|^k = e^{|z|} - 1 < 1,$$

o que significa que $\log e^z$ faz sentido. Agora, uma vez que $\log e^z = z$ para $z \in (-\log 2, \log 2)$, usando um argumento semelhante ao apresentado acima temos que $\log e^z = z$ sempre que $|z| < \log 2$. \square

Dado $T \in \mathcal{L}(E)$, defina

$$\log T = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (T - \text{id}_E)^k,$$

sempre que a série converge. Observe que este é o caso quando $\|T - \text{id}_E\| < 1$, pois deste modo

$$\sum_k \left\| \frac{(-1)^{k+1}}{k} (T - \text{id}_E)^k \right\| \leq \sum_k \frac{1}{k} \|T - \text{id}_E\|^k \leq \sum_k \|T - \text{id}_E\|^k,$$

que converge pois $\|T - \text{id}_E\| < 1$.

Lema 1.2.3. *Seja*

$$V = \{T \in \mathcal{L}(E) : \|T - \text{id}_E\| < 1\}.$$

Então, $\log : V \rightarrow \mathcal{L}(E)$ é uma função contínua.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, seja

$$B_n = \{t \in V : \|T - \text{id}_E\| \leq 1 - 1/n\}.$$

Como B_n é fechado em V , $\forall n$, e $V = \bigcup_{n \geq 2} B_n$, é suficiente mostrar que \log é contínua em B_n , $\forall n$. Isso é feito de maneira semelhante à do lema 1.2.1, e deixamos os detalhes para o leitor. \square

Com base nesses resultados, podemos finalmente mostrar:

Teorema 1.2.4. *Seja*

$$U = \{X \in \mathcal{L}(E) : \|X\| < \log 2\}.$$

Então $\exp(U) \subseteq V$ e $\exp : U \rightarrow V$ é um homeomorfismo sobre sua imagem cuja inversa é \log .

Demonstração. A verificação de que $\exp(U) \subseteq V$ é análoga à feita para os números complexos, e a deixamos a cargo do leitor. Como $\log : V \rightarrow \mathcal{L}(E)$ é contínua, para mostrar que \exp é um homeomorfismo sobre sua imagem com inversa \log , é suficiente mostrar que $\forall X \in U$ vale

$$\begin{aligned} e^{\log e^X} &= e^X \\ \log e^X &= X. \end{aligned}$$

Para a primeira equação, vamos mostrar algo mais: que $\forall T \in V$ temos $e^{\log T} = T$. Para tanto, tome $T \in V$. Há dois casos:

- (1) *T é diagonalizável:* Neste caso, sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ os autovalores de T e (v_1, \dots, v_n) uma base de E formada por autovetores unitários de T , com v_i associado a λ_i . Observe que $\forall i$ temos que

$$(T - \text{id}_E)^k(v_i) = (\lambda_i - 1)^k v_i, \forall k \geq 1$$

e que

$$\begin{aligned} |\lambda_i - 1| &= \|(\lambda_i - 1)v_i\| \\ &= \|(T - \text{id}_E)v_i\| \\ &\leq \|T - \text{id}_E\| \\ &< 1. \end{aligned}$$

Portanto, $\forall i$

$$\begin{aligned} \log T(v_i) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (T - \text{id}_E)^k(v_i) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (\lambda_i - 1)^k v_i \\ &= \log(\lambda_i) v_i, \end{aligned}$$

a última equação seguindo das observações acima e da definição do logaritmo complexo. Com isso, do exemplo 1.1.2 vem que $\forall i$

$$e^{\log T}(v_i) = e^{\log \lambda_i} v_i = \lambda_i v_i = T(v_i),$$

a segunda igualdade sendo conseqüência do lema 1.2.2. Portanto, $e^{\log T} = T$.

- (2) *T não é diagonalizável:* Neste caso, existe uma seqüência $\{T_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ de operadores diagonalizáveis que converge² para T . Sendo V um aberto de

²A existência de uma tal seqüência segue do fato de que o subconjunto de $\mathcal{L}(E)$ formado pelos operadores diagonalizáveis é denso em $\mathcal{L}(E)$. A demonstração deste fato, que envolve um certo trabalho com a forma de Jordan de T , pode ser vista em (HIRSCH; SMALE, 1974). A idéia central é que, ao perturbarmos T , obtemos um operador cujos autovalores são distintos dois-a-dois, donde diagonalizável, e que está próximo de T .

$\mathcal{L}(E)$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_m \in V$, $\forall m \geq m_0$; logo, podemos assumir, sem perda de generalidade, que $T_m \in V$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Portanto, do caso anterior e da continuidade de \exp e \log , temos que

$$\begin{aligned} T &= \lim_{m \rightarrow \infty} T_m \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} e^{\log T_m} \\ &= \exp \circ \log \left(\lim_{m \rightarrow \infty} T_m \right) \\ &= e^{\log T}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Isso mostra, em particular, que

$$e^{\log e^X} = e^X, \quad \forall X \in U,$$

uma vez que $\exp(U) \subseteq V$.

Para mostrar que $\log e^X = X$, $\forall X \in U$, o argumento é o mesmo: considerar separadamente os casos em que X é diagonalizável e em que X não é. Deixamos esta parte para o leitor. \square

Encerrando a seção, vamos ver uma importante aplicação do teorema acima na teoria que estamos desenvolvendo. Antes, um lema técnico:

Lema 1.2.5. *Seja $W = \exp(\frac{1}{2}U) \subseteq V$. Então, W é uma vizinhança de id_E e para todo $T \in W$ existe um único $S \in W$ que satisfaz $S^2 = T$. Além disso, $S = e^{\frac{1}{2}\log T}$.*

Demonstração. Como $\exp : U \rightarrow V$ é um homeomorfismo sobre a sua imagem e $\frac{1}{2}U$ é uma vizinhança de 0 em U , temos que W é uma vizinhança de id_E em V .

Dado $T \in W$, seja $X = \frac{1}{2}\log T \in \frac{1}{2}U$. Então, tomando $S = e^X \in W$, temos

$$S^2 = e^{2X} = e^{\log T} = T.$$

Se $\tilde{S} \in W$ é outro operador tal que $\tilde{S}^2 = T$, seja $Y = \log \tilde{S}$. Da definição de W vem que $Y \in \frac{1}{2}U$, isto é, que $2Y \in U$. Logo,

$$e^{2Y} = \tilde{S}^2 = T = e^{2X},$$

o que implica $X = Y$, pois $X, Y \in \frac{1}{2}U$ e $\exp|_U$ é injetiva. Portanto, $\tilde{S} = S$. \square

O resultado que queremos mostrar é uma extensão do corolário 1.1.13. Nele mostramos que todo homomorfismo de grupos *diferenciável* $\gamma : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (GL(E), \cdot)$ é da forma $\gamma(t) = e^{tX}$ e, além disso, X é único. O que faremos é mostrar o mesmo resultado substituindo a hipótese de diferenciabilidade pela de continuidade.

Teorema 1.2.6. *Seja $\gamma : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (GL(E), \cdot)$ um homomorfismo de grupo contínuo. Então, existe um único operador $X \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\gamma(t) = e^{tX}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, γ é diferenciável.*

Demonstração. A unicidade é feita como segue: assumindo que existe X tal que $\gamma(t) = e^{tX}$, temos que

$$X = \dot{\gamma}(0),$$

e X fica unicamente determinado. Deste modo, precisamos nos preocupar apenas com a existência.

Seja $W \subseteq V$ a vizinhança de id_E descrita no lema anterior. Como γ é contínua e $\gamma(0) = \text{id}_E$, existe um intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ ao redor de 0 tal que $\gamma(t) \in W$, $\forall t \in I$. Sejam $t_0 \in I \setminus \{0\}$ e $X = \frac{1}{t_0} \log \gamma(t_0)$. Logo, $t_0 X \in \frac{1}{2}U$ e $\gamma(t_0) = e^{t_0 X}$. Como para cada $t \in I$ temos que $t/2 \in I$, então $\gamma(t_0/2) \in W$. Além disso, como

$$\gamma(t_0/2)^2 = \gamma(t_0/2)\gamma(t_0/2) = \gamma(t_0),$$

o lema anterior garante que

$$\gamma(t_0/2) = e^{\frac{1}{2} \log \gamma(t_0)} = e^{\frac{t_0}{2} X}.$$

Repetindo o processo sucessivamente, temos $\forall k \in \mathbb{N}$ que

$$\gamma(t_0/2^k) = e^{\frac{t_0}{2^k} X}.$$

Mais do que isso: dados $m \in \mathbb{Z}$ e $k \in \mathbb{N}$ arbitrários, da equação acima segue que

$$\begin{aligned} \gamma\left(\frac{mt_0}{2^k}\right) &= \gamma\left(\frac{t_0}{2^k}\right)^m \\ &= \left(e^{\frac{t_0}{2^k} X}\right)^m \\ &= e^{\frac{mt_0}{2^k} X}. \end{aligned}$$

Seja

$$D = \left\{ \frac{m}{2^k} \in \mathbb{R} : m \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Mostramos acima que $\gamma(t) = e^{tX}$, $\forall t \in t_0 D$. Afirmamos que $t_0 D$ é denso em \mathbb{R} . Caso isso seja verdade, as continuidades de γ e de e^{tX} garantem que $\gamma(t) = e^{tX}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Para mostrar a afirmação, é suficiente que D seja denso em \mathbb{R} , pois $t_0 \neq 0$. Sejam $t \in \mathbb{R}$ qualquer, $\varepsilon > 0$ uma precisão e $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$t \in [n, n+1].$$

Escolhendo $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$, divida o intervalo $[n, n+1]$ em 2^k subintervalos de mesmo diâmetro. Cada um desses subintervalos é da forma

$$\left[n + \frac{l}{2^k}, n + \frac{l+1}{2^k} \right],$$

com $l \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$. Então, existe $l \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$ de modo que

$$t \in \left[n + \frac{l}{2^k}, n + \frac{l+1}{2^k} \right].$$

Portanto, o número

$$n + \frac{l}{2^k} = \frac{n \cdot 2^k + l}{2^k}$$

é da forma desejada e

$$\left| t - n - \frac{l}{2^k} \right| \leq \left| n + \frac{l+1}{2^k} - n - \frac{l}{2^k} \right| = \frac{1}{2^k} < \varepsilon,$$

o que completa a demonstração. \square

1.3 Grupos Lineares e suas Álgebras de Lie

Nesta seção, E denota um espaço vetorial de dimensão $n < \infty$ sobre \mathbb{K} , em que \mathbb{K} é corpo dos números reais ou complexos. O *grupo linear geral* de E , denotado por $GL(E)$, é o subconjunto de $\mathcal{L}(E)$ formado pelos operadores lineares invertíveis. Sabemos que, com a operação de composição, este conjunto forma um grupo.

Definição 1.3.1. Um grupo linear G é um subgrupo de $GL(E)$.

Fixada uma base em E , existe um isomorfismo de grupos entre $GL(E)$ e $GL(n, \mathbb{K})$, este sendo o grupo das matrizes invertíveis de ordem n sobre \mathbb{K} . Este isomorfismo é a função que a cada operador associa a matriz correspondente na base. Com isso, existe uma correspondência biunívoca entre os subgrupos de $GL(E)$ e de $GL(n, \mathbb{K})$ induzida por este isomorfismo³. Por esse motivo, não nos preocuparemos muito em fazer distinções entre operadores e matrizes.

Observação: Lembramos que, para verificar que um subconjunto G de $GL(E)$ é um subgrupo, basta verificar que G é não-vazio - o que, em geral, é feito mostrando-se que $\text{id}_E \in G$ - e que $ab, a^{-1} \in G, \forall a, b \in G$.

Antes de prosseguirmos com o desenvolvimento da teoria, vamos estudar alguns exemplos.

Exemplo 1.3.2. $GL(E)$ é um grupo linear. \triangle

Exemplo 1.3.3. Seja

$$SL(E) = \{a \in GL(E) : \det(a) = 1\}.$$

³Muitos chamam este resultado da teoria dos grupos de 2º Teorema dos Homomorfismos.

A verificação de que $SL(E)$ é um grupo linear é fácil e a deixamos para o leitor. Este grupo é chamado de *grupo linear especial*. \triangle

Para os próximos exemplos, vamos considerar que E está equipado com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Lembramos que um produto interno em E é uma função

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

que satisfaz as seguintes condições $\forall x, y, z \in E$ e $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

- (i) $\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \lambda \langle y, z \rangle$;
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;
- (iii) $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_+$;
- (iv) $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$.

Para cada operador $T \in \mathcal{L}(E)$, vamos denotar por T^* o operador adjunto a T com relação a este produto interno⁴.

Exemplo 1.3.4. Suponha que E é um espaço *real* e defina

$$O(E) = \{a \in GL(E) : a^*a = aa^* = \text{id}_E\}.$$

Como $\dim(E) < \infty$, esta definição é equivalente a

$$O(E) = \{a \in GL(E) : a^*a = \text{id}_E\},$$

pois, se $a^*a = \text{id}_E$, então a é injetiva, de modo que a finitude da dimensão implica a invertível e $a^{-1} = a^*$. Para mostrar que $O(E)$ é um grupo linear, primeiro note que $\text{id}_E \in O(E)$. Além disso, dados $a, b \in O(E)$, temos que

$$\begin{aligned} (ab)^*(ab) &= b^*a^*ab = \text{id}_E \\ (a^{-1})^*a^{-1} &= (a^*)^{-1}a^{-1} = (aa^*)^{-1} = \text{id}_E, \end{aligned}$$

e disso decorre a afirmação.

Observe que

$$O(E) = \{a \in GL(E) : \langle a(x), a(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \forall x, y \in E\}.$$

De fato, se $a \in O(E)$ então $\forall x, y \in E$ temos que

$$\langle a(x), a(y) \rangle = \langle x, a^*a(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

⁴O operador adjunto T^* é definido como o único operador linear em E que satisfaz $\forall x, y \in E$:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

Uma discussão mais detalhada a respeito deste assunto pode ser vista em (COELHO; LOURENÇO, 2005).

Reciprocamente, se $a \in GL(E)$ preserva o produto interno, então $\forall x \in E$ temos

$$\langle a^*a(x), y \rangle = \langle a(x), a(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall y \in E,$$

de modo que $a^*a(x) = x$ e disso segue a afirmação. Por causa dessa caracterização de $O(E)$, este grupo é chamado de *grupo ortogonal*. \triangle

Exemplo 1.3.5. Suponha, agora, que E é um espaço *complexo*. De maneira análoga ao exemplo anterior, definimos

$$U(E) = \{a \in GL(E) : a^*a = \text{id}_E\},$$

e mostra-se que $U(E)$ é um grupo linear. Este grupo é chamado de *grupo unitário*. \triangle

Exemplo 1.3.6. Seja

$$SO(E) = \{a \in GL(E) : a^*a = \text{id}_E, \det(a) = 1\}.$$

Como $SO(E) = O(E) \cap SL(E)$, é imediato que $SO(E)$ é um grupo linear, chamado de *grupo ortogonal especial*. \triangle

Exemplo 1.3.7. Seja

$$SU(E) = \{a \in GL(E) : a^*a = \text{id}_E, \det(a) = 1\}.$$

De modo similar, $SU(E) = U(E) \cap SL(E)$, o que faz de $SU(E)$ um grupo linear, o *grupo unitário especial*. \triangle

Exemplo 1.3.8. Seja $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ uma forma bilinear. Defina

$$\text{Aut}(\phi) = \{a \in GL(E) : \phi(a(x), a(y)) = \phi(x, y), \forall x, y \in E\}.$$

Para ver que $\text{Aut}(\phi)$ é um grupo linear, observe que $\text{id}_E \in \text{Aut}(\phi)$, e tome $a, b \in \text{Aut}(\phi)$. Dados $x, y \in E$, temos

$$\begin{aligned} \phi((ab)(x), (ab)(y)) &= \phi(a(b(x)), a(b(y))) \\ &= \phi(b(x), b(y)) \\ &= \phi(x, y) \\ \phi(a^{-1}(x), a^{-1}(y)) &= \phi(a(a^{-1}(x)), a(a^{-1}(y))) \\ &= \phi(x, y), \end{aligned}$$

o que mostra que $ab, a^{-1} \in \text{Aut}(\phi)$. Se E é um espaço real e ϕ é simétrica e não-degenerada, denotamos $\text{Aut}(\phi)$ por $O(\phi)$. Neste caso, existe um resultado de Álgebra Linear que mostra existirem únicos $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $p+q = \dim(E)$ e uma base (v_1, \dots, v_n) de E que satisfaz:

$$\phi(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } i \neq j \\ -1 & , \text{ se } i = j \leq p \\ 1 & , \text{ se } i = j > p. \end{cases}$$

O número $q - p$ é o *índice* de ϕ e $q + p$, o *posto*. \triangle

Exemplo 1.3.9. Vamos ver um caso concreto do exemplo anterior. Considere, em \mathbb{R}^2 , a forma bilinear ϕ dada por

$$\phi(x, y) = -x^1 y^1 + x^2 y^2.$$

Vamos determinar explicitamente o grupo $\text{Aut}(\phi)$. Seja (e_1, e_2) a base canônica de E e escreva a matriz de $a \in GL(E)$ nesta base:

$$[a] = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}.$$

Para que $a \in \text{Aut}(\phi)$, é necessário que $\phi(a(e_i), a(e_j)) = \phi(e_i, e_j)$, com $i, j = 1, 2$. Desta maneira,

$$\begin{aligned} \phi(e_1, e_1) &= -1 = \phi(a(e_1), a(e_1)) = -\alpha^2 + \beta^2 \\ \phi(e_1, e_2) &= 0 = \phi(a(e_1), a(e_2)) = -\alpha\gamma + \beta\delta \\ \phi(e_2, e_2) &= 1 = \phi(a(e_2), a(e_2)) = -\gamma^2 + \delta^2, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 1 + \beta^2 \\ \delta^2 &= 1 + \gamma^2 \\ \alpha\gamma &= \beta\delta. \end{aligned}$$

Das duas primeiras equações vem que $|\alpha|, |\delta| \geq 1$ e que devemos considerar vários casos: $\alpha, \delta \geq 0$; $\alpha \geq 0$ e $\delta \leq 0$; $\alpha \leq 0$ e $\delta \geq 0$; $\alpha, \delta \leq 0$. Faremos apenas o primeiro, pois os outros são análogos.

Do fato de que $\alpha, \delta \geq 0$ vem que existem $s, t \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha = \cosh(s)$ e $\delta = \cosh(t)$. Logo,

$$\begin{aligned} |\beta| &= \sqrt{\alpha^2 - 1} = \sqrt{\cosh^2(s) - 1} = |\sinh(s)| \\ |\gamma| &= \sqrt{\delta^2 - 1} = \sqrt{\cosh^2(t) - 1} = |\sinh(t)| \end{aligned}$$

Possivelmente substituindo s por $-s$ ou t por $-t$, destas equações segue que $\beta = \sinh(s)$ e $\gamma = \sinh(t)$. Além disso,

$$\alpha\gamma = \beta\delta \Rightarrow \alpha^2\gamma^2 = \beta^2\delta^2 \Rightarrow (1 + \beta^2)\gamma^2 = \beta^2(1 + \gamma^2) \Rightarrow \gamma^2 = \beta^2 \Rightarrow |\beta| = |\gamma|,$$

isto é,

$$|\sinh(s)| = |\sinh(t)| \Rightarrow s = \pm t.$$

Se $s = -t$, então

$$0 = -\alpha\gamma + \beta\delta = -\cosh(t)\sinh(t) - \sinh(t)\cosh(t) = -2\cosh(t)\sinh(t),$$

o que significa que $\sinh(t) = 0$, isto é, que $t = 0$. De qualquer modo, $s = t$, e disso vem que

$$[a] = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Os outros casos fornecem as seguintes possibilidades:

$$\begin{aligned} [a] &= \begin{pmatrix} -\cosh(t) & -\sinh(t) \\ \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}; \\ [a] &= \begin{pmatrix} \cosh(t) & \sinh(t) \\ -\sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix}; \\ [a] &= \begin{pmatrix} -\cosh(t) & \sinh(t) \\ \sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Não é difícil ver, que se a matriz de a é dada por uma dessas formas, então $a \in \text{Aut}(\phi)$. Portanto, os elementos de $\text{Aut}(\phi)$ são as rotações hiperbólicas compostas com reflexões, e este grupo é denominado *grupo de Lorentz* de dimensão 2. \triangle

Todos os grupos que estudamos nos exemplos acima têm, como foi observado, correspondentes matriciais. A tabela a seguir dá as equivalências.

$GL(E)$	$GL(n, \mathbb{K})$
$SL(E)$	$SL(n, \mathbb{K})$
$O(E)$	$O(n)$
$U(E)$	$U(n)$
$SO(E)$	$SO(n)$
$SU(E)$	$SU(n)$
$O(\phi)$	$O(p, q)$

Tabela 1.1: Correspondência entre os grupos lineares. Na última linha, $q - p$ é o índice de ϕ e $q + p$, seu posto.

O fato dos grupos lineares serem subconjuntos de $\mathcal{L}(E)$ nos motiva a considerar neles outras estruturas além da de grupo.

Definição 1.3.10. *Sejam G um grupo linear, $a \in G$ e $X \in \mathcal{L}(E)$. Dizemos que X é tangente a G em a se existe uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow G$ definida em um intervalo aberto da reta ao redor de 0 tal que $\gamma(0) = a$ e $\dot{\gamma}(0) = X$. O conjunto de todos os operadores tangentes a G em a , denotado por $T_a G$, é chamado espaço tangente a G em a . O espaço tangente $T_{\text{id}_E} G$ é denotado por \mathfrak{g} .*

Observação: Note que $T_a G \neq \emptyset$, $\forall a \in G$, pois, considerando a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ dada por $\gamma(t) = a$, vemos que $0 \in T_a G$.

Esta definição já indica a nossa intenção de, mais tarde, definir uma estrutura diferenciável para os grupos lineares (veja os capítulos 2 e 3 para mais

detalhes). A influência que a estrutura de grupo exerce sobre os espaços tangentes já pode ser vista no seguinte resultado:

Teorema 1.3.11. *Sejam G um grupo linear e $a \in G$. Então,*

$$T_a G = a\mathfrak{g} = \mathfrak{g}a,$$

em que

$$\begin{aligned} a\mathfrak{g} &= \{aX : X \in \mathfrak{g}\} \\ \mathfrak{g}a &= \{Xa : X \in \mathfrak{g}\}. \end{aligned}$$

Demonstração. Faremos apenas a verificação da primeira igualdade, pois a da outra é semelhante.

Dado $X \in T_a G$, existe uma curva suave $\gamma : I \rightarrow G$ tal que $\gamma(0) = a$ e $\dot{\gamma}(0) = X$. Defina $\delta : I \rightarrow G$ por $\delta(t) = a^{-1}\gamma(t)$. É imediato que δ é diferenciável e que $\delta(0) = \text{id}_E$. Logo $a^{-1}X = \dot{\delta}(0) \in \mathfrak{g}$, de modo que $X = a(a^{-1}X) \in a\mathfrak{g}$.

Reciprocamente, se $X \in a\mathfrak{g}$, então $a^{-1}X \in \mathfrak{g}$, o que implica a existência de uma curva $\gamma : I \rightarrow G$ tal que $\gamma(0) = \text{id}_E$ e $\dot{\gamma}(0) = a^{-1}X$. Portanto, definindo $\delta : I \rightarrow G$ por $\delta(t) = a\gamma(t)$, temos que $\delta(0) = a$ e que $\dot{\delta}(0) = X$, do que segue $X \in T_a G$. \square

Observe que, dados $a, b \in G$,

$$T_{ab}G = (ag)\mathfrak{g} = a(b\mathfrak{g}) = a(T_b G)$$

e que

$$T_{ba}G = (ba)\mathfrak{g} = b(a\mathfrak{g}) = b(\mathfrak{g}a) = (b\mathfrak{g})a = (T_b G)a.$$

Defina, para cada $a \in G$, as funções $L_a, R_a : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ por

$$\begin{aligned} L_a(b) &= ab \\ R_a(b) &= ba. \end{aligned}$$

Estas funções são lineares, diferenciáveis, e as observações acima mostram que $\forall a, b \in G$

$$\begin{aligned} T_{L_a(b)}G &= L_a(T_b G) \\ T_{R_a(b)}G &= R_a(T_b G). \end{aligned}$$

Em particular, podemos reescrever o enunciado do teorema anterior da seguinte maneira: $\forall a \in G$

$$T_a G = L_a(\mathfrak{g}) = R_a(\mathfrak{g}).$$

Proposição 1.3.12. *Seja G um grupo linear. Então $T_a G$ é um espaço vetorial real e $\dim(T_a G) = \dim \mathfrak{g}$.*

Observação: Mesmo que o espaço E seja um espaço complexo, não é possível garantir que os espaços tangentes a G sejam subespaços complexos de $M(n, \mathbb{C})$. Veremos um caso no exemplo 1.3.15.

Demonstração. Como $T_a G = L_a(\mathfrak{g})$ e L_a é um isomorfismo linear em $\mathcal{L}(E)$ (pois $(L_a)^{-1} = L_{a^{-1}}$), então basta mostrar que \mathfrak{g} é um espaço vetorial real, e, feito isso, é imediato que $\dim(T_a G) = \dim \mathfrak{g}$.

Para verificar que \mathfrak{g} é um espaço vetorial real é suficiente mostrar que \mathfrak{g} é um subespaço de $\mathcal{L}(E)$. De fato, temos que $0 \in \mathfrak{g}$, pois a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ dada por $\gamma(t) = \text{id}_E$ é suave, $\gamma(0) = \text{id}_E$ e $\dot{\gamma}(0) = 0$. Além disso, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, sejam $\gamma, \sigma : I \rightarrow G$ tais que $\gamma(0) = \sigma(0) = \text{id}_E$, $\dot{\gamma}(0) = X$ e $\dot{\sigma}(0) = Y$. Sendo $J \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo adequadamente escolhido ao redor de 0, defina $\delta : J \rightarrow G$ por $\delta(t) = \gamma(t)\sigma(\lambda t)$. Então,

$$\delta(0) = \gamma(0)\sigma(0) = \text{id}_E$$

e

$$\begin{aligned} \dot{\delta}(0) &= \dot{\gamma}(0)\sigma(0) + \gamma(0)\lambda\dot{\sigma}(0) \\ &= X + \lambda Y. \end{aligned}$$

Portanto, $X + \lambda Y \in \mathfrak{g}$, como queríamos demonstrar. \square

Vamos, nos próximos exemplos, determinar o espaço tangente a id_E para alguns grupos lineares.

Exemplo 1.3.13. Seja $\mathfrak{gl}(E) = T_{\text{id}_E} GL(E)$. É imediato da definição que $\mathfrak{gl}(E) \subseteq \mathcal{L}(E)$, e, tomando $X \in \mathcal{L}(E)$ qualquer, considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow GL(E)$ dada por $\gamma(t) = e^{tX}$. Decorre do que fizemos na primeira seção deste capítulo que γ está bem-definida, que $\gamma(0) = \text{id}_E$ e que $\dot{\gamma}(t) = X e^{tX}$. Logo, $X = \dot{\gamma}(0) \in \mathfrak{gl}(E)$, donde $\mathfrak{gl}(E) = \mathcal{L}(E)$. \triangle

Exemplo 1.3.14. Considere o grupo $SO(E)$ e seja $\mathfrak{so}(E) = T_{\text{id}_E} SO(E)$. Seja $\gamma : I \rightarrow SO(E)$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = \text{id}_E$. Então, $\forall t \in I$

$$\gamma(t)^* \gamma(t) = \text{id}_E \Rightarrow \frac{d}{dt} \gamma(t)^* \gamma(t) = 0.$$

Como

$$\frac{d}{dt} \gamma(t)^* \gamma(t) = \dot{\gamma}(t)^* \gamma(t) + \gamma(t)^* \dot{\gamma}(t),$$

então

$$\dot{\gamma}(t)^* \gamma(t) + \gamma(t)^* \dot{\gamma}(t) = 0, \quad \forall t \in I.$$

Em particular, fazendo $t = 0$ obtemos

$$\dot{\gamma}(0)^* + \dot{\gamma}(0) = 0 \Rightarrow \dot{\gamma}(0)^* = -\dot{\gamma}(0),$$

ou seja, $\dot{\gamma}(0)$ é um operador antisimétrico. Além disso, como

$$\frac{d}{dt} \det(\gamma(t)) = \det(\gamma(t)) \operatorname{tr}(\gamma(t)^{-1} \dot{\gamma}(t))$$

(consulte (HANCHE-OLSEN, 1997) para mais detalhes), o fato de que $\det(\gamma(t)) = 1$, $\forall t \in I$, implica

$$\det(\gamma(t)) \operatorname{tr}(\gamma(t)^{-1} \dot{\gamma}(t)) = \operatorname{tr}(\gamma(t)^{-1} \dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Tomando $t = 0$, esta equação escreve-se como

$$\operatorname{tr}(\dot{\gamma}(0)) = 0.$$

Esta condição é redundante, pois toda matriz antisimétrica possui traço nulo. Portanto,

$$\mathfrak{so}(E) \subseteq \{X \in \mathcal{L}(E) : X^* = -X\}.$$

Para verificar a inclusão recíproca, primeiro note que, dado $X \in \mathcal{L}(E)$,

$$(e^X)^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (X^k)^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (X^*)^k = e^{X^*}$$

e, sendo $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ os autovalores⁵ de X , temos que $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n} \in \mathbb{C}$ são os autovalores de e^X , de modo que

$$\det(e^X) = e^{\lambda_1} \dots e^{\lambda_n} = e^{\lambda_1 + \dots + \lambda_n} = e^{\operatorname{tr}(X)}.$$

Com isso, se $X \in \mathcal{L}(E)$ é antisimétrico, então

$$\begin{aligned} (e^X)^* &= e^{X^*} = e^{-X} = (e^X)^{-1} \\ \det(e^X) &= e^{\operatorname{tr}(X)} = e^0 = 1, \end{aligned}$$

o que mostra que $e^X \in SO(E)$.

Como o conjunto dos operadores antisimétricos é um subespaço de $\mathcal{L}(E)$, dado X antisimétrico podemos definir a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow SO(E)$ por $\gamma(t) = e^{tX}$. Sabemos da seção anterior que γ é diferenciável, que $\gamma(0) = \operatorname{id}_E$ e que $\dot{\gamma}(t) = X e^{tX}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Portanto $X = \dot{\gamma}(0) \in \mathfrak{so}(E)$, do que segue

$$\mathfrak{so}(E) = \{X \in \mathcal{L}(E) : X^* = -X\},$$

como queríamos mostrar. Observe que $\mathfrak{so}(E)$ também é o espaço tangente a $O(E)$ em id_E . \triangle

Exemplo 1.3.15. Para calcular o espaço $\mathfrak{su}(E) = T_{\operatorname{id}_E} SU(E)$, procedemos de maneira análoga ao exemplo anterior e concluimos que

$$\mathfrak{su}(E) = \{X \in \mathcal{L}(E) : X^* = -X, \operatorname{tr}(X) = 0\};$$

⁵Ainda que X seja um operador num espaço real, seus autovalores podem ser complexos.

no entanto, neste caso a condição $\text{tr}(X) = 0$ não é redundante, pois tratam-se de operadores complexos.

Observe que, apesar de $\mathfrak{su}(E)$ ser um espaço real (de acordo com a proposição anterior), dado $X \in \mathfrak{su}(E) \setminus \{0\}$, temos que $\mathbf{i}X \notin \mathfrak{su}(E)$, pois

$$(\mathbf{i}X)^* = \bar{\mathbf{i}}X^* = (-\mathbf{i}) \cdot (-X) = \mathbf{i}X \neq -\mathbf{i}X.$$

Portanto, $\mathfrak{su}(E)$ não é um espaço complexo. \triangle

Observe que em todos os exemplos acima a caracterização do espaço \mathfrak{g} envolveu mostrar que $\exp(\mathfrak{g}) \subseteq G$ e usar este fato para construir as curvas necessárias. Podemos nos questionar se este é um comportamento comum a todos os grupos lineares, e, talvez surpreendentemente, a resposta é sim. Esta é uma propriedade importante dos grupos lineares, e a demonstraremos na próxima seção.

Outra pergunta que poderíamos fazer diz respeito a se a estrutura de grupo para G determina alguma estrutura adicional nos espaços tangente, especialmente em \mathfrak{g} . No apêndice B mostramos que se E é um espaço vetorial qualquer, então $\mathcal{L}(E)$ possui uma estrutura de álgebra de Lie dada pelo seguinte colchete:

$$[X, Y] = XY - YX, \forall X, Y \in \mathcal{L}(E).$$

Com esta estrutura, denotamos $\mathcal{L}(E)$ por $\mathfrak{gl}(E)$ - a mesma notação para o espaço tangente a $GL(E)$ em id_E - e temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3.16. *Seja G um grupo linear. Então, \mathfrak{g} é uma subálgebra de Lie real de $\mathfrak{gl}(E)$.*

Demonstração. Sabemos da última proposição que \mathfrak{g} é um espaço vetorial real, de modo que apenas precisamos mostrar que \mathfrak{g} é fechado em relação ao colchete de Lie de $\mathfrak{gl}(E)$.

Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, sejam $\gamma, \sigma : I \rightarrow G$ curvas suaves tais que $\gamma(0) = \sigma(0) = \text{id}_E$, $\dot{\gamma}(0) = X$ e $\dot{\sigma}(0) = Y$. Defina $\delta : I \times I \rightarrow G$ por

$$\delta(s, t) = \gamma(s)\sigma(t)\gamma(s)^{-1}.$$

Então, δ é diferenciável e, para cada $s \in I$, a curva $\delta_s : I \rightarrow G$ é suave e satisfaz

$$\delta_s(0) = \text{id}_E.$$

Logo, para todo $s \in I$ temos que $\dot{\delta}_s(0) \in \mathfrak{g}$. Por outro lado,

$$\dot{\delta}_s(0) = \gamma(s)\dot{\sigma}(0)\gamma(s)^{-1} = \gamma(s)Y\gamma(s)^{-1},$$

de modo que $\gamma(s)Y\gamma(s)^{-1} \in \mathfrak{g}$, $\forall s \in I$. Isso define uma curva suave $\eta : I \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por

$$\eta(s) = \gamma(s)Y\gamma(s)^{-1}.$$

Sendo \mathfrak{g} um subespaço de $\mathcal{L}(E)$, então $\dot{\eta}(0) \in \mathfrak{g}$. Como

$$\frac{d}{ds} \gamma(s)^{-1} = -\gamma(s)^{-1} \dot{\gamma}(s) \gamma(s)^{-1}$$

(obtem-se esta identidade diferenciando a equação $\gamma(s)\gamma(s)^{-1} = \text{id}_E$), temos que

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(s) &= \dot{\gamma}(s)Y\gamma(s)^{-1} + \gamma(s)Y\frac{d}{ds}\gamma(s)^{-1} \\ &= \dot{\gamma}(s)Y\gamma(s)^{-1} - \gamma(s)Y\gamma(s)^{-1}\dot{\gamma}(s)\gamma(s)^{-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(0) &= \dot{\gamma}(0)Y\gamma(0)^{-1} - \gamma(0)Y\gamma(0)^{-1}\dot{\gamma}(0)\gamma(0)^{-1} \\ &= XY - YX \\ &= [X, Y], \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. \square

Este teorema motiva seguinte definição:

Definição 1.3.17. *Seja G um grupo linear. A álgebra de Lie de G é o espaço tangente \mathfrak{g} munido do colchete de Lie herdado de $\mathfrak{gl}(E)$.*

Segue do exemplo 1.2.i que, quando consideramos em $\mathfrak{gl}(E)$ apenas a estrutura real, então $\mathfrak{gl}(E)$ é a álgebra de Lie do grupo $GL(E)$.

As relações entre os grupos lineares (e, mais geralmente, os grupos de Lie) e suas álgebras de Lie formam o núcleo do que hoje é chamado de *Teoria de Lie*. Por causa do fato de que quando exponenciamos \mathfrak{g} obtemos um subconjunto de G , por muitos anos a álgebra de Lie \mathfrak{g} foi chamada de *grupo de geradores infinitesimais* de G , apesar de não ser o que chamamos de grupo e, de maneira geral, não gerar G .

O matemático norueguês Sophus Lie descobriu os objetos que atualmente chamamos grupos de Lie (dos quais os grupos lineares compõem uma classe importante) ao estudar simetrias de equações diferenciais. Ele tentava construir para estas equações uma teoria semelhante à Teoria de Galois, que estuda a solubilidade de equações polinomiais por meio de radicais — para mais detalhes, veja (GONÇALVES, 2005). A sua abordagem envolvia estudar estas simetrias através de transformações “infinitesimais”, que são os elementos da álgebra de Lie do grupo. Após “colar” uma quantidade suficiente de tais transformações (exponenciar), obtém-se uma boa aproximação para a simetria em questão, e deste processo muitas propriedades podem ser estudadas.

Um dos resultados mais interessantes desta teoria é o chamado Teorema da Correspondência de Lie, que afirma que, dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(E)$, existe um único grupo linear $G \subseteq GL(E)$ conexo cuja álgebra de Lie é \mathfrak{g} . A demonstração deste fato, que não faremos neste trabalho, envolve a fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (ref. (HALL, 2003)), e pode ser vista em (ROSSMANN, 2002).

1.4 Um Teorema Fundamental

O objetivo desta seção é provar o seguinte resultado:

Teorema 1.4.1. *Sejam G um grupo linear e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. Então,*

$$\exp(\mathfrak{g}) \subseteq G.$$

Este teorema — talvez o mais importante deste trabalho — tem profundas implicações na teoria dos grupos lineares. Antes de demonstrá-lo, vejamos algumas conseqüências dele.

Corolário 1.4.2. *Sejam G um grupo linear e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. Então, um operador $X \in \mathcal{L}(E)$ pertence a \mathfrak{g} sse $e^{tX} \in G$, $\forall t \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Se $e^{tX} \in G$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ dada por $\gamma(t) = e^{tX}$ está bem-definida, é suave e satisfaz $\gamma(0) = \text{id}_E$. Logo,

$$X = \dot{\gamma}(0) \in \mathfrak{g}.$$

Reciprocamente, se $X \in \mathfrak{g}$, então $tX \in \mathfrak{g}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Portanto, do teorema decorre que $e^{tX} \in G$, $\forall t \in \mathbb{R}$. \square

Corolário 1.4.3. *Sejam G um grupo linear e \mathfrak{g} sua álgebra de Lie. Suponha que $\gamma : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$ é uma curva suave tal que*

$$\begin{aligned} \gamma(0) &\in G \\ \dot{\gamma}(t) &= X\gamma(t), \forall t \in I, \end{aligned}$$

em que $X \in \mathfrak{g}$. Então, $\gamma(t) \in G$, $\forall t \in I$.

Demonstração. Sabemos do corolário 1.1.10 que a única curva γ que satisfaz essas condições é dada por

$$\gamma(t) = e^{tX}\gamma(0), \forall t \in I.$$

Como $X \in \mathfrak{g}$ e $\gamma(0) \in G$, segue do corolário anterior que $\gamma(t) \in G$, $\forall t \in I$. \square

Corolário 1.4.4. *Sejam G um grupo linear e $\gamma : (\mathbb{R}, +) \rightarrow G$ um homomorfismo de grupos contínuo. Então, existe um único $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\gamma(t) = e^{tX}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Em particular, γ é diferenciável.*

Demonstração. Decorre do teorema 1.2.6 que existe um único $X \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\gamma(t) = e^{tX}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Por outro lado, como $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$, então $e^{tX} \in G$, $\forall t \in \mathbb{R}$, o que pelo corolário 1.4.2 significa que $X \in \mathfrak{g}$. \square

Voltemos, agora, a nossa atenção para a demonstração do teorema. Faremos isso através de uma seqüência de resultados preliminares, cada um importante por si só. A idéia foi extraída de (ROSSMANN, 2002).

Lema 1.4.5. *Se existe uma vizinhança $U \subseteq \mathfrak{g}$ de 0 tal que $\exp(U) \subseteq G$, então $\exp(\mathfrak{g}) \subseteq G$.*

Observação: Apesar de que não utilizaremos este lema explicitamente na demonstração do teorema, ele ilustra a idéia básica.

Demonstração. Seja U uma tal vizinhança e tome $r > 0$ de modo que

$$B_{\mathfrak{g}}(0, r) = \{X \in \mathfrak{g} : \|X\| < r\} \subseteq U.$$

Logo,

$$\exp(B_{\mathfrak{g}}(0, r)) \subseteq \exp(U) \subseteq G.$$

Dado $X \in \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ qualquer (o caso em que $X = 0$ é imediato), seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $X/n \in B_{\mathfrak{g}}(0, r)$: basta tomar $n > \|X\|/r$. Portanto, $e^{X/n} \in G$, e disso segue que $e^X = (e^{X/n})^n \in G$. \square

Dado $X \in \mathfrak{g}$ (mesmo que X esteja numa pequena vizinhança de 0), como saber se $e^X \in G$? Precisamos de um critério para determinar quando um operador $a \in \mathcal{L}(E)$ pertence a G . Por causa do lema anterior, que mostra ser suficiente considerar apenas pequenas vizinhanças, e do fato de $e^0 = \text{id}_E \in G$, construiremos este teste apenas numa vizinhança de id_E em $\mathcal{L}(E)$.

Sejam (X_1, \dots, X_m) uma base de \mathfrak{g} e $\{\gamma_i : I_i \rightarrow G : i = 1, \dots, m\}$ uma família de curvas suaves tais que

$$\begin{aligned}\gamma_i(0) &= \text{id}_E \\ \dot{\gamma}_i(0) &= X_i.\end{aligned}$$

Considere o conjunto

$$U' = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i X_i : t_i \in I_i \right\},$$

e note que U' é uma vizinhança de 0 em \mathfrak{g} . Defina $g : U' \rightarrow G$ por

$$g(t_1 X_1 + \dots + t_m X_m) = \gamma_1(t_1) \cdots \gamma_m(t_m).$$

É imediato desta expressão que g é diferenciável. Além disso, temos $dg_0(X) = X$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, pois calculando dg_0 na base escolhida vemos que

$$\begin{aligned}dg_0(X_i) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(tX_i) - g(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_1(0) \cdots \gamma_{i-1}(0) \gamma_i(t) \gamma_{i+1}(0) \cdots \gamma_m(0) - \text{id}_E}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\gamma_i(t) - \gamma_i(0)}{t} \\ &= \dot{\gamma}_i(0) \\ &= X_i.\end{aligned}$$

Observação: Antes de prosseguir, vale a pena observar que qualquer função diferenciável g definida numa vizinhança de 0 em \mathfrak{g} com imagem em G e cuja

diferencial em 0 satisfaz $dg_0(X) = X$, $\forall X \in \mathfrak{g}$, serve aos nossos propósitos. A função que exibimos acima é apenas um exemplo.

Considere um subespaço $\mathfrak{h} \subseteq \mathcal{L}(E)$ suplementar a \mathfrak{g} , isto é, tal que $\mathcal{L}(E) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ (apesar da notação ser similar, \mathfrak{h} não precisa, necessariamente, ser uma álgebra de Lie). Defina $h : \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ por $h(Y) = \text{id}_E + Y$. É imediato que h é diferenciável e que $dh_0(Y) = Y$, $\forall Y \in \mathfrak{h}$. Vale para h a mesma observação que fizemos para g , i.e., qualquer função $h : \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ diferenciável cuja diferencial em 0 é a identidade serve.

Seja, finalmente,

$$U' \oplus \mathfrak{h} = \{X + Y \in \mathcal{L}(E) : X \in U', Y \in \mathfrak{h}\},$$

que é uma vizinhança de 0 em $\mathcal{L}(E)$, e defina $\Phi : U' \oplus \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ por

$$\Phi(X + Y) = g(X)h(Y).$$

Segue da construção de g e h que Φ é diferenciável e que $\forall X \in \mathfrak{g}$, $\forall Y \in \mathfrak{h}$

$$\begin{aligned} d\Phi_0(X + Y) &= d\Phi_0(X) + d\Phi_0(Y) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(tX) - \Phi(0)}{t} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Phi(sY) - \Phi(0)}{s} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(tX) - g(0)}{t} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{h(sY) - h(0)}{s} \\ &= dg_0(X) + dh_0(Y) \\ &= X + Y. \end{aligned}$$

Como $\mathcal{L}(E) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$, então a função $d\Phi_0$ é um isomorfismo linear, o que, pelo Teorema da Função Inversa, garante a existência de vizinhanças $U, V \subseteq \mathcal{L}(E)$ de 0 e id_E , respectivamente, tais que $\Phi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo⁶. Um dos fatos mais relevantes sobre este difeomorfismo é o seguinte:

Lema 1.4.6. *Seja $a \in V$. Se $\Phi^{-1}(a) \in \mathfrak{g}$, então $a \in G$.*

Demonstração. Supondo que $\Phi^{-1}(a) \in \mathfrak{g}$, temos que

$$a = \Phi(\Phi^{-1}(a)) = g(\Phi^{-1}(a)) \in G,$$

pois $\Phi|_{\mathfrak{g}} = g$ e $g : U' \subseteq \mathfrak{g} \rightarrow G$. □

Escreva $\forall a \in V$

$$\Phi^{-1}(a) = \xi(a) + \eta(a),$$

em que $\xi(a) \in \mathfrak{g}$ e $\eta(a) \in \mathfrak{h}$ são os únicos com esta propriedade. Isso define funções diferenciáveis $\xi : V \rightarrow \mathfrak{g}$ e $\eta : V \rightarrow \mathfrak{h}$, e com esta notação podemos rephraser o lema anterior da seguinte maneira:

⁶Veja o Apêndice A para mais detalhes sobre o Teorema da Função Inversa.

Lema 1.4.7. *Seja $a \in V$. Então, $\Phi^{-1}(a) \in \mathfrak{g}$ sse $\eta(a) = 0$. Conseqüentemente, se $\eta(a) = 0$, então $a \in G$.*

O teste que procurávamos é o enunciado neste lema. Sabemos, da seção anterior, que \exp é uma função contínua, de modo que existe uma vizinhança de 0 em $\mathcal{L}(E)$ que é levada por \exp em V . No entanto, dado $X \in \mathfrak{g}$ nesta vizinhança, não temos como mostrar diretamente que $\eta(e^X) = 0$, a fim de usar o lema 1.4.5. Devemos, portanto, encontrar um caminho alternativo.

Dado $X \in \mathfrak{g}$, considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ dada por $\gamma(t) = e^{tX}$. Sabemos que esta curva é diferenciável (donde contínua) e que $\gamma(0) = \text{id}_E$, o que significa que para toda vizinhança Ω de id_E em $\mathcal{L}(E)$ (em particular, $\Omega = V$) existe um intervalo aberto $I_\Omega \subseteq \mathbb{R}$ ao redor de 0 tal que $\gamma(t) \in \Omega$, $\forall t \in I_\Omega$. Caso mostremos a existência de um tal Ω tal que $\eta(\gamma(t)) = 0$ para todo $t \in I_\Omega$, então, pelo lema anterior, $\gamma(t) \in G$. Usando o raciocínio apresentado na demonstração do lema 1.3.4, neste caso tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n \in I_\Omega$, de modo que

$$\gamma\left(\frac{1}{n}\right) = e^{X/n} \in G,$$

e disso concluimos que $e^X = (e^{X/n})^n \in G$.

Por outro lado, como $\gamma(0) = \text{id}_E$ e $\Phi^{-1}(\text{id}_E) = 0$, então $\eta(\gamma(0)) = 0$. Portanto, para mostrar que $\eta(\gamma(t)) = 0$ para todo $t \in I_\Omega$, é necessário e suficiente que

$$\frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) = 0, \quad \forall t \in I_\Omega.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) &= d\eta_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) \\ &= d\eta_{\gamma(t)}(X\gamma(t)), \end{aligned}$$

a condição acima é expressa mais explicitamente como

$$d\eta_{\gamma(t)}(X\gamma(t)) = 0, \quad \forall t \in I_\Omega.$$

Nesse sentido, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.4.8. *Existe uma vizinhança $\Omega \subseteq V$ de id_E em $\mathcal{L}(E)$ tal que $\forall a \in \Omega$ e $\forall Z \in \mathfrak{g}$ temos*

$$d\eta_a(Za) = 0.$$

Demonstração. Primeiro, tome $a \in V$ qualquer, e escreva

$$\Phi^{-1}(a) = X + Y, \quad X \in \mathfrak{g}, \quad Y \in \mathfrak{h},$$

isto é,

$$X = \xi(a), \quad Y = \eta(a).$$

Seja $Z \in \mathfrak{g}$ qualquer e considere a curva $\gamma : I_Z \rightarrow V$ dada por

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= \Phi(X + tZ + Y) \\ &= g(X + tZ)h(Y),\end{aligned}$$

em que $I_Z \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto ao redor de 0 pequeno o suficiente para γ esteja bem-definida. Da definição de X e Y vem que

$$a = \Phi(X + Y) = g(X)h(Y) \Rightarrow h(Y) = g(X)^{-1}a,$$

já que $g(X) \in G$. Deste modo, podemos escrever

$$\gamma(t) = g(X + tZ)g(X)^{-1}a, \quad \forall t \in I_Z.$$

Observe que $\sigma_Z : t \in I_Z \mapsto g(X + tZ)g(X)^{-1} \in G$ é uma curva suave e que $\sigma_Z(0) = \text{id}_E$. Logo,

$$dg_X(Z)g(X)^{-1} = \dot{\sigma}_Z(0) \in \mathfrak{g}$$

Deste modo, temos que

$$\gamma(t) = \sigma_Z(t)a,$$

e que

$$\begin{aligned}\gamma(0) &= a \\ \eta(\gamma(t)) &= \eta(\Phi(X + tZ + Y)) = Y.\end{aligned}$$

Diferenciando esta última equação, obtemos

$$\frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) = d\eta_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = 0.$$

Como

$$\dot{\gamma}(t) = dg_{X+tZ}(Z)g(X)^{-1}a,$$

a equação acima pode ser reescrita como

$$d\eta_{\gamma(t)}(dg_{X+tZ}(Z)g(X)^{-1}a) = 0, \quad \forall t \in I_Z;$$

fazendo $t = 0$,

$$d\eta_a(dg_X(Z)g(X)^{-1}a) = 0. \quad (1.4.1)$$

Considere a função $T_X : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por

$$T_X(Z) = dg_X(Z)g(X)^{-1}.$$

Como $T_X(Z) = \dot{\sigma}_Z(0)$, $\forall Z \in \mathfrak{g}$, então T_X está bem-definida, e é imediato que T_X é linear. Com esta notação, podemos reescrever (1.3.1) da seguinte forma

$$d\eta_a(T_X(Z)a) = 0, \quad \forall Z \in \mathfrak{g}.$$

Seja $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ a função que associa a cada $X \in \mathfrak{g}$ o operador T_X . A partir da definição de T_X , não é difícil mostrar que T é uma função contínua.

Além disso, como $T_0 = \text{id}_{\mathfrak{g}}$, o fato de $GL(\mathfrak{g})$ ser um subconjunto aberto⁷ de $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ implica haver uma vizinhança $\Gamma \subseteq \mathfrak{g}$ de 0 tal que $T(\Gamma) \subseteq GL(\mathfrak{g})$.

Por fim, seja $\Omega = \xi^{-1}(\Gamma)$. É imediato que $\Omega \subseteq V$ é uma vizinhança de id_E em $\mathcal{L}(E)$. Ademais, se $a \in \Omega$, então $X = \xi(a) \in \Gamma$, o que implica $\forall Z \in \mathfrak{g}$

$$d\eta_a(Za) = d\eta_a(T_X(T_X^{-1}(Z)) \cdot a) = 0,$$

como queríamos demonstrar. \square

Para concluir a demonstração do teorema, basta aplicar a discussão que fizemos anteriormente à vizinhança Ω descrita na proposição.

1.5 A Representação Adjunta de um Grupo Linear

Sejam G e H grupos lineares; digamos, G um subgrupo de $GL(E)$ e H de $GL(F)$. Aqui, E e F são \mathbb{K} -espaços vetoriais de dimensão finita quaisquer, inclusive podendo um deles ser real e o outro, complexo.

Definição 1.5.1. *Um homomorfismo entre G e H é uma função contínua*

$$\Phi : G \rightarrow H$$

que também é um homomorfismo de grupos.

Observação: Para esta definição, consideramos em G e H as métricas induzidas pelas normas dos seus espaços-ambiente.

Nesta seção vamos estudar um homomorfismo particular chamado *representação adjunta* de um grupo linear.

Seja G um grupo linear. Para cada $a \in G$, definimos a função $I_a : G \rightarrow G$ por

$$I_a(b) = aba^{-1}, \quad \forall b \in G.$$

Observe que I_a é um homomorfismo de grupos, pois $\forall b, c \in G$

$$\begin{aligned} I_a(bc) &= a(bc)a^{-1} \\ &= (aba^{-1})(aca^{-1}) \\ &= I_a(b)I_a(c), \end{aligned}$$

e que I_a é uma função contínua, pois

$$I_a = L_a|_G \circ R_a|_G.$$

⁷Este resultado segue do fato de que $GL(E) = \det^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$ e que $\det : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$ é uma função contínua, pois é um polinômio quando fixamos uma base para E e descrevemos os operadores pelas suas matrizes.

Dado $X \in \mathfrak{g}$, considere a curva $t \in \mathbb{R} \mapsto I_a(e^{tX}) \in G$, que está bem-definida pelo trabalho feito na seção anterior. Observe que $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} I_a(e^{tX}) &= ae^{tX}a^{-1} \\ &= a \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k X^k \right) a^{-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (aX^k a^{-1}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k (aXa^{-1})^k \\ &= e^{t(aXa^{-1})}. \end{aligned}$$

Portanto $e^{t(aXa^{-1})} \in G$, $\forall t \in \mathbb{R}$, o que, pelo corolário 1.4.2, implica $aXa^{-1} \in \mathfrak{g}$. Como isso vale para todo $X \in \mathfrak{g}$, para cada $a \in G$ podemos definir a função $\text{Ad}(a) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ por

$$\text{Ad}(a)X = aXa^{-1}.$$

Proposição 1.5.2. *A função $\text{Ad}(a)$ é um isomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração. A bijetividade segue do fato de que $\text{Ad}(a^{-1}) = \text{Ad}(a)^{-1}$, como o leitor pode facilmente verificar, e a linearidade decorre da bilinearidade da multiplicação de operadores. Além disso, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos

$$\begin{aligned} \text{Ad}(a)[X, Y] &= aXYa^{-1} - aYXa^{-1} \\ &= (aXa^{-1})(aYa^{-1}) - (aYa^{-1})(aXa^{-1}) \\ &= [\text{Ad}(a)X, \text{Ad}(a)Y], \end{aligned}$$

do que segue o resultado. □

Portanto, $\text{Ad}(a)$ é um *automorfismo* da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Não é difícil mostrar que o conjunto $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ dos automorfismos de \mathfrak{g} é um subgrupo de $GL(\mathfrak{g})$, o que faz de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ um grupo linear.

Teorema 1.5.3. *A função $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ é um homomorfismo.*

Demonstração. Para ver que é um homomorfismo de grupos, sejam $a, b \in G$. Logo, $\forall X \in \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} \text{Ad}(ab)X &= (ab)X(ab)^{-1} \\ &= a(bXb^{-1})a^{-1} \\ &= \text{Ad}(a)\text{Ad}(b)X, \end{aligned}$$

o que mostra a afirmação.

Vamos, agora, provar que Ad é contínua em $a \in G$. Primeiro, tome $b \in G$ qualquer. Para estimar $\|\text{Ad}(a) - \text{Ad}(b)\|$, seja $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\|X\| \leq 1$. Então,

$$\begin{aligned} \|\text{Ad}(a)X - \text{Ad}(b)X\| &= \|aXa^{-1} - bXb^{-1}\| \\ &= \|aXa^{-1} - bXa^{-1} + bXa^{-1} - bXb^{-1}\| \\ &\leq \|aXa^{-1} - bXa^{-1}\| + \|bXa^{-1} - bXb^{-1}\| \\ &\leq \|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| + \|b\| \cdot \|a^{-1} - b^{-1}\|, \end{aligned}$$

o que implica

$$\|\text{Ad}(a) - \text{Ad}(b)\| \leq \|a - b\| \cdot \|a^{-1}\| + \|b\| \cdot \|a^{-1} - b^{-1}\|.$$

Como a inversão de operadores é uma função contínua, da expressão acima é fácil ver que, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar uma vizinhança de a em G de modo que, se b está nesta vizinhança, então $\|\text{Ad}(a) - \text{Ad}(b)\| < \varepsilon$. \square

Definição 1.5.4. A função $\text{Ad} : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{g})$ é a representação adjunta do grupo G .

Vamos, por hora, considerar \mathfrak{g} como uma álgebra de Lie real de dimensão finita qualquer. Sabemos, dos comentários acima, que $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ é um grupo linear. Qual será a sua álgebra de Lie?

Para tanto, denote por $\mathfrak{aut}(\mathfrak{g})$ a álgebra de Lie de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$. Dado $T \in \mathfrak{aut}(\mathfrak{g})$, temos que $e^{tT} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, isto é, para cada $X, Y \in \mathfrak{g}$

$$e^{tT}[X, Y] = [e^{tT}X, e^{tT}Y].$$

Diferenciando esta equação,

$$Te^{tT}[X, Y] = [Te^{tT}X, e^{tT}Y] + [e^{tT}X, Te^{tT}Y];$$

fazendo $t = 0$,

$$T[X, Y] = [T(X), Y] + [X, T(Y)].$$

Portanto, $T \in \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ (veja o apêndice B para mais informações sobre esta álgebra de Lie).

Reciprocamente, se $T \in \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$, então $T \in \mathfrak{aut}(\mathfrak{g})$ sse $e^{tT} \in \text{Aut}(\mathfrak{g})$, $\forall t \in \mathbb{R}$, ou seja, sse $\forall t \in \mathbb{R}$ e $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$ vale

$$e^{tT}[X, Y] = [e^{tT}X, e^{tT}Y].$$

Equivalentemente,

$$e^{-tT} [e^{tT}X, e^{tT}Y] = [X, Y].$$

Diferenciando o membro esquerdo, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-tT} [e^{tT}X, e^{tT}Y]) &= -e^{-tT}T [e^{tT}X, e^{tT}Y] + \\ &\quad + e^{-tT} ([Te^{tT}X, e^{tT}Y] + [e^{tT}X, Te^{tT}Y]) \\ &= -e^{-tT}T [e^{tT}X, e^{tT}Y] + e^{-tT}T [e^{tT}X, e^{tT}Y] \\ &= 0; \end{aligned}$$

a segunda igualdade decorre de $T \in \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$. Com isso, temos que

$$e^{-tT} [e^{tT} X, e^{tT} Y]$$

é constante. Como em $t = 0$ a identidade desejada é válida, temos que $T \in \mathfrak{aut}(\mathfrak{g})$. Isso mostra o seguinte resultado:

Teorema 1.5.5. *Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie real de dimensão finita. Então, a álgebra de Lie de $\text{Aut}(\mathfrak{g})$ é $\mathfrak{der}(\mathfrak{g})$.*

Voltemos agora à situação em que G é um grupo linear e \mathfrak{g} é a sua álgebra de Lie. O resultado acima nos permite considerar o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ \exp \uparrow & & \uparrow \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow[\phi]{} & \mathfrak{der}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

Queremos encontrar uma função $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ que complete o diagrama de forma a torná-lo comutativo, ou seja, que satisfaça $\text{Ad} \circ \exp = \exp \circ \phi$. Além disso, queremos que ϕ preserve as estruturas em questão, isto é, que ϕ seja um homomorfismo de álgebras de Lie.

Seja $X \in \mathfrak{g}$ e considere a curva

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \text{Ad}(e^{tX}).$$

Sendo uma composição de funções contínuas, γ é contínua. O mesmo argumento se aplica para mostrar que γ é um homomorfismo de grupos. Portanto, pelo corolário 1.3.4, γ é suave e existe um único $\phi(X) \in \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ tal que

$$\gamma(t) = \text{Ad}(e^{tX}) = e^{t\phi(X)}.$$

Note que, tomando $t = 1$, isso significa, em particular, que $\text{Ad}(e^X) = e^{\phi(X)}$. A função $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{der}(\mathfrak{g})$ assim definida é a única que satisfaz a equação $\text{Ad} \circ \exp = \exp \circ \phi$.

Para calcular ϕ explicitamente, tome $X, Y \in \mathfrak{g}$. Então,

$$\begin{aligned} \phi(X)Y &= \left. \frac{d}{dt} (e^{t\phi(X)}) \right|_{t=0} Y \\ &= \left. \frac{d}{dt} (e^{t\phi(X)} Y) \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{t\phi(X)} Y) &= \frac{d}{dt} (e^{tX} Y e^{-tX}) \\ &= e^{tX} X Y e^{-tX} - e^{tX} Y X e^{-tX} \\ &= \text{Ad}(e^{tX}) (XY - YX) \\ &= \text{Ad}(e^{tX}) [X, Y], \end{aligned}$$

então

$$\phi(X)Y = [X, Y], \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Deste modo, $\phi = \text{ad}$, a representação adjunta da álgebra de Lie \mathfrak{g} . Sabemos que esta função é um homomorfismo de álgebras de Lie (veja o apêndice B), o que mostra o seguinte:

Teorema 1.5.6. *Sejam G um grupo linear e \mathfrak{g} a sua álgebra de Lie. Então, o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{Ad}} & \text{Aut}(\mathfrak{g}) \\ \text{exp} \uparrow & & \uparrow \text{exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\text{ad}} & \text{Der}(\mathfrak{g}) \end{array}$$

comuta, isto é, $\text{Ad} \circ \text{exp} = \text{exp} \circ \text{ad}$. Ademais, ad é a única função com esta propriedade.

A construção feita acima não vale apenas para Ad . Mais geralmente, se G e H são grupos lineares, \mathfrak{g} e \mathfrak{h} são as respectivas álgebras de Lie e $\Phi : G \rightarrow H$ é um homomorfismo, existe um único homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ tal que $\Phi \circ \text{exp} = \text{exp} \circ \phi$, isto é, que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\Phi} & H \\ \text{exp} \uparrow & & \uparrow \text{exp} \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{\phi} & \mathfrak{h} \end{array}$$

A construção de ϕ é semelhante ao que fizemos no caso de Ad : dado $X \in \mathfrak{g}$, considere a curva

$$\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto \Phi(e^{tX}) \in H.$$

Temos que γ é um homomorfismo de grupos contínuo entre \mathbb{R} e H , de modo que existe um único $\phi(X) \in \mathfrak{h}$ tal que

$$\Phi(e^{tX}) = e^{t\phi(X)}.$$

Isso define uma função $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ (a única) que satisfaz a identidade desejada. Entretanto, mostrar que ϕ é um homomorfismo de álgebras de Lie não é uma tarefa simples, e não o faremos aqui. Uma verificação detalhada deste fato pode ser vista em (HALL, 2003).

1.6 A Diferenciabilidade de \exp

Mostramos na seção 1.2 que $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ é uma função contínua. Começamos com o seguinte resultado:

Teorema 1.6.1. *A função \exp é de classe \mathcal{C}^1 .*

Demonstração. Considere a sequência de funções $\{F_k : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dadas por

$$F_k(X) = \frac{1}{k!} X^k.$$

Temos que estas funções são diferenciáveis e que $\exp = \sum_k F_k$. Para que \exp seja \mathcal{C}^1 , é suficiente que $\sum_k dF_k$ convirja uniformemente em toda bola fechada de $\mathcal{L}(E)$ (os detalhes acerca deste fato podem ser vistos em (LIMA, 2005)). Faremos isso mostrando que para todo $X \in \mathcal{L}(E)$ a série $\sum_k d(F_k)_X$ converge absolutamente. Para tanto, precisamos estimar $\|d(F_k)_X(Y)\|$ para $\|Y\| \leq 1$.

1) $k = 0$: $d(F_0)_X(Y) = 0$;

2) $k = 1$: $d(F_1)_X(Y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{X + tY - X}{t} = Y \Rightarrow \|d(F_1)_X\| \leq 1$;

3) $k \geq 2$: Neste caso,

$$\begin{aligned} d(F_k)_X(Y) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_k(X + tY) - F_k(X)}{t} \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(X + tY)^k - X^k}{t}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} (X + tY)^k - X^k &= (X + tY)^k + \sum_{j=1}^{k-1} (X + tY)^j X^{k-j} - \\ &\quad - \sum_{j=1}^{k-1} (X + tY)^j X^{k-j} - X^k \\ &= \sum_{j=1}^k (X + tY)^j X^{k-j} - \sum_{j=0}^{k-1} (X + tY)^j X^{k-j} \\ &= \sum_{j=1}^k [(X + tY)^j X^{k-j} - (X + tY)^{j-1} X^{k-j+1}] \\ &= t \sum_{j=1}^k (X + tY)^{j-1} Y X^{k-j}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} d(F_k)_X(Y) &= \frac{1}{k!} \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{j=1}^k (X + tY)^{j-1} Y X^{k-j} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k X^{j-1} Y X^{k-j}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \|d(F_k)_X(Y)\| &\leq \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k \|X\|^{j-1} \cdot \|Y\| \cdot \|X\|^{k-j} \\ &\leq \frac{1}{(k-1)!} \|X\|^{k-1}, \end{aligned}$$

para $k \geq 2$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \|d(F_k)_X(Y)\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \|X\|^{k-1} \\ &= e^{\|X\|}, \end{aligned}$$

do que segue o resultado. \square

Pode-se mostrar que \exp é, na verdade, de classe \mathcal{C}^∞ (o que nós chamamos apenas de diferenciável), mas não faremos isso neste trabalho. A demonstração do corolário a seguir é imediata do teorema e da observação anterior.

Corolário 1.6.2. *Sejam G um grupo linear e \mathfrak{g} a sua álgebra de Lie. Então, $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$ é uma função diferenciável.*

Vamos dedicar algumas páginas para calcular a diferencial de \exp explicitamente, e para isso usaremos a teoria desenvolvida na seção anterior.

Teorema 1.6.3. *Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{gl}(E)$ uma curva diferenciável. Então, para cada $t \in \mathbb{R}$ temos*

$$\frac{d}{dt} e^{\gamma(t)} = e^{\gamma(t)} \frac{\text{id}_E - e^{-\text{ad}(\gamma(t))}}{\text{ad}(\gamma(t))} \dot{\gamma}(t),$$

em que

$$\frac{\text{id}_E - e^{-\text{ad}(\gamma(t))}}{\text{ad}(\gamma(t))} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \text{ad}(\gamma(t))^k.$$

Observações:

- (1) Escrevemos $\mathfrak{gl}(E)$ em vez de $\mathcal{L}(E)$ para ressaltar a estrutura de álgebra de Lie.

- (2) Dado $X \in \mathfrak{gl}(E)$, $\text{ad}(X)^k$ denota o operador linear em $\mathfrak{gl}(E)$ definido por
- $$\text{ad}(X)^k Y = \underbrace{[X, [X, \dots, [X, Y] \dots]]}_{k \text{ vezes}}, \quad \forall Y \in \mathfrak{gl}(E).$$

Demonstração. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathfrak{gl}(E)$ dada por

$$f(s, t) = e^{-s\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial t} e^{s\gamma(t)},$$

que é diferenciável. Nosso objetivo é calcular

$$\frac{d}{dt} e^{\gamma(t)} = e^{\gamma(t)} f(1, t).$$

Para tanto, observe que

$$\begin{aligned} f(1, t) &= f(1, t) - f(0, t) \\ &= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s}(s, t) ds. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \left(\frac{\partial}{\partial s} e^{-s\gamma(t)} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} e^{s\gamma(t)} \right) + e^{-s\gamma(t)} \left(\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} e^{s\gamma(t)} \right) \\ &= -e^{-s\gamma(t)} \gamma(t) \frac{\partial}{\partial t} e^{s\gamma(t)} + e^{-s\gamma(t)} \left(\frac{\partial^2}{\partial t \partial s} e^{s\gamma(t)} \right) \\ &= -e^{-s\gamma(t)} \gamma(t) \frac{\partial}{\partial t} e^{s\gamma(t)} + e^{-s\gamma(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma(t) e^{s\gamma(t)}) \\ &= -e^{-s\gamma(t)} \gamma(t) \frac{\partial}{\partial t} e^{s\gamma(t)} + e^{-s\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) e^{s\gamma(t)} + e^{-s\gamma(t)} \gamma(t) \frac{\partial}{\partial t} e^{s\gamma(t)} \\ &= e^{-s\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) e^{s\gamma(t)}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial s} &= \text{Ad}(e^{-s\gamma(t)}) \dot{\gamma}(t) \\ &= e^{-\text{ad}(s\gamma(t))} \dot{\gamma}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} s^k \text{ad}(\gamma(t))^k \dot{\gamma}(t). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(1, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k}{k!} s^k \text{ad}(\gamma(t))^k \dot{\gamma}(t) ds \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \frac{s^{k+1}}{k+1} \text{ad}(\gamma(t))^k \dot{\gamma}(t) \Big|_0^1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \text{ad}(\gamma(t))^k \dot{\gamma}(t), \end{aligned}$$

como queríamos. □

Corolário 1.6.4. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{gl}(E)$. Então,*

$$d\exp_X(Y) = e^X \frac{\text{id}_E - e^{-\text{ad}(X)}}{\text{ad}(X)} Y.$$

Demonstração. Temos do teorema que

$$d\exp_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = \frac{d}{dt} e^{\gamma(t)} = e^{\gamma(t)} \frac{\text{id}_E - e^{-\text{ad}(\gamma(t))}}{\text{ad}(\gamma(t))} \dot{\gamma}(t).$$

Deste modo, basta tomar $\gamma(t) = X + tY$ e escrever a equação acima em $t = 0$ para obter o resultado. \square

Corolário 1.6.5. *Existem vizinhanças $U, V \subseteq \mathcal{L}(E)$ de 0 e id_E , respectivamente, tais que $\exp : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo e sua inversa é \log .*

Demonstração. Mostramos na seção 1.2 que se tomarmos $U' = B(0, \log 2)$ e $V' = \exp(U')$, então $\exp : U' \rightarrow V'$ é bijetiva com inversa \log . No entanto, isso não mostra que \log é diferenciável⁸. Por outro lado, como \exp é diferenciável e

$$d\exp_0 = e^0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \text{ad}(0)^k = \text{id}_{\mathcal{L}(E)},$$

decorre do Teorema da Função Inversa que existem vizinhanças U'' de 0 e V'' de id_E tais que $\exp : U'' \rightarrow V''$ é um difeomorfismo. Portanto, basta tomar $U = U' \cap U''$ e $V = V' \cap V''$ para obtermos o resultado. \square

Sejam G um grupo linear, \mathfrak{g} sua álgebra de Lie e considere a função $\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$. Dado $X \in \mathfrak{g}$, observe que $d\exp_X \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$, pois é dado por uma série de potências convergente de tais operadores. Note também que, do corolário anterior, $d\exp_0 = \text{id}_{\mathfrak{g}}$. Disso concluímos que, na demonstração do teorema 1.4.1, podemos tomar $g = \exp$, e as informações que obtivemos a respeito da função Φ , ξ e η permanecem válidas.

Com base nestes resultados e observações, discutiremos, agora, mais consequências do teorema 1.4.1; mais precisamente, do trabalho feito na sua demonstração.

Proposição 1.6.6. *Seja $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \Omega \subseteq \mathcal{L}(E)$ uma curva suave, em que I é um intervalo aberto ao redor de 0 e Ω é a vizinhança de id_E descrita na proposição 1.4.8. Suponha que $\gamma(0) = e^{X_0}$, para $X_0 \in \mathfrak{g}$ numa vizinhança de 0 , e que $\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{g}\gamma(t)$, $\forall t \in I$. Então, existe uma curva $X : I \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que $\gamma(t) = e^{X(t)}$. Em particular, $\gamma(I) \subseteq G$.*

Observações:

- (1) Este resultado é distinto do corolário 1.4.3. Lá, exigimos que $\dot{\gamma} = X\gamma$, para algum $X \in \mathfrak{g}$ fixado.

⁸Apesar de podermos aplicar um argumento análogo ao apresentado na demonstração do teorema 1.6.1 para provar isso.

- (2) Ao contrário do que parece, simplesmente aplicar a função \log em γ não resolve o problema, pois não sabemos, a princípio, se γ está no domínio de \log ou se $\log \circ \gamma$ está em \mathfrak{g} .

Demonstração. Como $\gamma(0) = e^{X_0}$, então $\eta(\gamma(0)) = 0$. Além disso,

$$\frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) = d\eta_{\gamma(t)}(\dot{\gamma}(t)) = d\eta_{\gamma(t)}(Z(t)\gamma(t)),$$

em que $Z(t) \in \mathfrak{g}$ é tal que $\dot{\gamma}(t) = Z(t)\gamma(t)$. A existência de $Z(t)$ está garantida pelo fato de que

$$\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{g}\gamma(t).$$

Portanto, da proposição 1.4.8 vem que

$$\frac{d}{dt} \eta(\gamma(t)) = 0, \forall t \in I,$$

de modo que $\eta(\gamma(t)) = 0$. Disso decorre que $\Phi^{-1}(\gamma(t)) \in \mathfrak{g}$, o que define uma curva suave $X : I \rightarrow \mathfrak{g}$ dada por

$$X(t) = \Phi^{-1}(\gamma(t)),$$

que satisfaz

$$e^{X(t)} = g(X(t)) = \Phi(\Phi^{-1}(\gamma(t))) = \gamma(t). \quad \square$$

Sabemos da seção 1.2 que todo operador em $\mathcal{L}(E)$ suficientemente próximo de id_E é exponencial de um operador numa vizinhança de 0. No entanto, dado $a \in G$, mesmo que $a \in G$ esteja próximo o bastante de id_E , o que certamente implica que $a = e^X$ para algum $X \in \mathcal{L}(E)$, pode ocorrer que $X \notin \mathfrak{g}$.

O seguinte resultado dá certas condições para que anomalias como a descrita acima não ocorram.

Corolário 1.6.7. *Seja $a \in \Omega \cap G$ para o qual existe uma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega \cap G$ tal que $\gamma(0) = e^{X_0}$, com $X_0 \in \mathfrak{g}$ próximo de 0, e $\gamma(t_0) = a$, para algum $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então, existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $a = e^X$.*

Demonstração. Defina, para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a curva $\sigma_t : (-\varepsilon - t, \varepsilon - t) \rightarrow G$ por

$$\sigma_t(s) = \gamma(s + t)\gamma(t)^{-1}.$$

Como o contradomínio de γ está contido em G , σ_t está bem-definida para todo t . Além disso, $\sigma_t(0) = \text{id}_E$, de modo que

$$\dot{\sigma}_t(0) = \dot{\gamma}(t)\gamma(t)^{-1} \in \mathfrak{g}.$$

Logo,

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\sigma}_t(0)\gamma(t) \in \mathfrak{g}\gamma(t).$$

Uma vez que $\gamma(t) \in \Omega$, $\forall t$, isso significa que podemos aplicar a proposição para a curva γ , obtendo assim uma curva suave $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathfrak{g}$ tal que $\gamma(t) = e^{X(t)}$. Disso segue que $a = \gamma(t_0) = e^{X(t_0)}$. \square

O resultado provado acima é um tanto sutil. É fácil ver que qualquer elemento de $\exp(\mathfrak{g}) \subseteq G$ pode ser conectado à identidade por uma curva suave (basta considerar a curva $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tX} \in G$). No entanto, a recíproca não é, em geral, verdadeira. O corolário dá condições para que seja.

Exemplo 1.6.8. Considere o conjunto \mathbb{Q}^* dos números racionais não-nulos. Com a operação de multiplicação, temos que \mathbb{Q}^* é um grupo, subgrupo de $GL(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^*$. Logo, \mathbb{Q}^* é um grupo linear. A sua álgebra de Lie é $\{0\}$, pois qualquer curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow \mathbb{Q}^*$ tal que $\gamma(0) = 1$ é necessariamente constante e igual a 1 (este fato é uma consequência imediata do Teorema do Valor Intermediário). Com isso, se tomarmos $a \in \mathbb{Q}^* \setminus \{1\}$ arbitrariamente próximo de 1, teremos $a \notin \exp(\{0\}) = \{1\}$. Isso se deve ao fato de que a não pode ser conectado a 1 por nenhuma curva suave que esteja em \mathbb{Q}^* . \triangle

1.7 Exemplos

Nesta seção apresentamos alguns exemplos importantes da teoria que construímos. Primeiro, analisamos com algum cuidado a função exponencial entre $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e $SL(2, \mathbb{R})$. Depois, estudamos os grupos $SO(3)$ e $SU(2)$ e as relações entre eles. Por fim, mostramos uma aplicação à Geometria Diferencial de curvas espaciais.

$SL(2, \mathbb{R})$

O grupo $SL(2, \mathbb{R})$ é a contraparte matricial de $SL(E)$, em que E é um espaço real bidimensional. Podemos defini-lo independentemente por

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{a \in M(2, \mathbb{R}) : \det(a) = 1\}.$$

A sua álgebra de Lie, verifica-se facilmente, é

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{X \in M(2, \mathbb{R}) : \text{tr}(X) = 0\}.$$

Vamos calcular a imagem da função $\exp : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R})$. Para tanto, exibiremos uma maneira explícita de calcular \exp para tais matrizes.

Dado $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, o polinômio característico de X é

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - \text{tr}(X)\lambda + \det(X) \\ &= \lambda^2 + \det(X). \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos

$$\begin{aligned} p(X) &= X^2 + \det(X)I_2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

de modo que

$$X^2 = -\det(X)I_2.$$

Seja $\rho \in \mathbb{C}$ tal que $\rho^2 = \det(X)$. Fazendo $\alpha = \sqrt{|\det(X)|}$, temos duas possibilidades para ρ :

- Se $\det(X) \geq 0$, então escolhemos $\rho = \sqrt{\det(X)} = \alpha$.
- Se $\det(X) < 0$, então tomamos $\rho = \mathbf{i}\sqrt{-\det(X)} = \mathbf{i}\alpha$.

De qualquer modo,

$$X^2 = -\rho^2 I_2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} e^X &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} X^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} X^{2k+1}, \end{aligned}$$

separando os termos de índice par dos de índice ímpar. Substituindo $X^2 = -\rho^2 I_2$ nas séries acima, temos

$$\begin{aligned} e^X &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \rho^{2k} I_2 + \frac{1}{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \rho^{2k+1} X \\ &= \cos(\rho) I_2 + \frac{\sin(\rho)}{\rho} X. \end{aligned}$$

Observe que esta fórmula vale para ρ real e complexo indistintamente, pois caso $\rho = \mathbf{i}\alpha$ então

$$\cos(\rho) = \frac{e^{\mathbf{i}\rho} + e^{-\mathbf{i}\rho}}{2} = \frac{e^{-\alpha} + e^{\alpha}}{2} = \cosh(\alpha).$$

Para determinar $\exp(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, precisamos resolver a equação

$$a = \cos(\rho) I_2 + \frac{\sin(\rho)}{\rho} X$$

na variável $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ fixando $a \in SL(2, \mathbb{R})$. Uma vez que queremos X tal que $\text{tr}(X) = 0$, então

$$\begin{aligned} \text{tr}(a) &= \text{tr}(\cos(\rho) I_2) \\ &= 2 \cos(\rho). \end{aligned}$$

Temos os seguintes casos:

- 1) $\text{tr}(a) < -2$: Para que isso ocorra, é necessário que $\rho = \mathbf{i}\alpha$, de modo que

$$\cos(\rho) = \cosh(\alpha) < -1,$$

o que é um absurdo, já que $\cosh(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Logo, $a \notin \exp(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$.

- 2) $\text{tr}(a) = -2$: Se $\rho \in \mathbb{R}$, então $\rho = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$. Caso contrário,

$$-1 = \cos(\rho) = \cosh(\alpha),$$

o que não pode acontecer. Então, $\rho = (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{N}$, donde $\det(X) = (2n+1)^2\pi^2$. Qualquer matriz X em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ com esta propriedade satisfaz $\text{tr}(e^X) = -2$. Observe também que, neste caso, $e^X = -I_2$, e disso concluimos que, se $a \in SL(2, \mathbb{R})$ é tal que $\text{tr}(a) = -2$ mas $a \neq -I_2$, então $a \notin \exp(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$.

- 3) $-2 < \text{tr}(a) < 2$: Então, $\rho \in \mathbb{R}$, pois caso contrário teríamos $\cos(\rho) = \cosh(\alpha) \geq 1$. Observe que $\sin(\rho) \neq 0$, pois $\cos(\rho) \neq \pm 1$. Logo, a equação

$$a = \cos(\rho)I_2 + \frac{\sin(\rho)}{\rho} X$$

se resolve como

$$X = \frac{\rho}{\sin(\rho)} \left(a - \frac{1}{2}\text{tr}(a)I_2 \right),$$

em que $\rho > 0$ é tal que $\cos(\rho) = \frac{1}{2}\text{tr}(a)$. Por causa da periodicidade do cosseno, existe uma quantidade enumerável de tais matrizes.

- 4) $\text{tr}(a) = 2$ e $a = I_2$: Temos que $\rho = 0$ ou $\rho = 2n\pi$, com $n \in \mathbb{N}^*$. Na primeira situação,

$$a = I_2 + X \Rightarrow X = a - I_2 = 0.$$

Na segunda, não existem restrições. Logo, $X = 0$ ou $\det(X) = (2n\pi)^2$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

- 5) $\text{tr}(a) = 2$ e $a \neq I_2$: Temos, simplesmente, que $\rho = 0$ (já que os outros casos fornecem $e^X = I_2$), donde $X = a - I_2 \neq 0$.

- 6) $\text{tr}(a) > 2$: Devemos ter $\rho = i\alpha$, de modo que $\cos(\rho) = \cosh(\alpha)$ e

$$\sin(\rho) = \frac{e^{i\rho} - e^{-i\rho}}{2i} = -i \frac{e^\alpha - e^{-\alpha}}{2} = i \sinh(\alpha).$$

Disso segue que

$$a = \cosh(\alpha)I_2 + \frac{\sinh(\alpha)}{\alpha} X.$$

Como $\cosh(\alpha) > 1$, então $\alpha \neq 0$, e portanto

$$X = \frac{\alpha}{\sinh(\alpha)} \left(a - \frac{1}{2}\text{tr}(a)I_2 \right),$$

em que $\alpha > 0$ é tal que $\cosh(\alpha) = \frac{1}{2}\text{tr}(a)$. A solução, neste caso, é única.

Concluimos que

$$\exp(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})) = \{a \in SL(2, \mathbb{R}) : \text{tr}(a) > -2 \text{ ou } a = -I_2\}.$$

Podemos obter algumas consequências disso. Como $\forall X \in M(2, \mathbb{R})$ temos que $\det(e^X) = e^{\text{tr}(X)}$, se $X \in M(2, \mathbb{R})$ é tal que $e^X \in SL(2, \mathbb{R})$, então necessariamente $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Isso mostra, por exemplo, que a matriz

$$a = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$$

não é exponencial de *matriz alguma de* $M(2, \mathbb{R})$, pois $\text{tr}(a) = -2$, mas $a \neq -I_2$. No entanto, o grupo $SL(2, \mathbb{R})$ é conexo por caminhos diferenciáveis (ref. (HALL, 2003)), de modo que existe uma curva suave conectando a ao neutro I_2 . Tendo em vista o corolário 1.6.7, vemos que as hipóteses lá apresentadas realmente são necessárias.

$SO(3)$

Consideraremos para este exemplo E como um espaço vetorial real tridimensional munido de um produto interno. O grupo $SO(E)$ neste caso é, muitas vezes, chamado de $SO(3)$, aludindo às matrizes dos operadores fixada uma base. Como faremos muitas mudanças de bases ao longo deste exemplo, não adotaremos este ponto de vista.

A álgebra de Lie de $SO(E)$ é

$$\mathfrak{so}(E) = \{X \in \mathcal{L}(E) : X^* = -X\},$$

como já verificamos na seção 1.3.

Antes de prosseguirmos, uma rápida discussão a respeito de orientação de bases. Dado um espaço vetorial real V de dimensão finita, podemos considerar a seguinte relação de equivalência no conjunto das bases ordenadas de V :

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \text{a matriz de passagem de } \alpha \text{ para } \beta \text{ possui determinante positivo.}$$

Quando duas bases estão relacionadas, dizemos que elas possuem a *mesma orientação*. Esta relação determina exatamente duas classes de equivalência, marcadas pela propriedade de que, quando trocamos uma base de uma das classes por uma da outra, a matriz de passagem tem determinante negativo.

Em muitos casos, o espaço V possui uma base particularmente importante, a chamada *base canônica* de V . Quando isso acontece, as bases que estão relacionadas com a canônica são ditas *positivas* (ou *orientadas positivamente*) e as outras, *negativas* (ou *orientadas negativamente*).

Neste exemplo e no próximo, trabalharemos apenas nesta situação, de modo que quando aparecer o termo *base positiva*, estamos assumindo que o espaço em questão possui uma base canônica. Observe que estas noções de orientação de bases ordenadas não fazem sentido para espaços complexos.

O resultado a seguir fornece informações importantes a respeito de $SO(E)$ e da sua álgebra de Lie. As demonstrações dos dois primeiros itens é padrão em cursos de Álgebra Linear, de modo que não os faremos aqui. O leitor pode consultar (LIMA, 2001) para os detalhes.

Teorema 1.7.1. (a) Dado $a \in SO(E)$, existe uma base ortonormal e positiva (v_1, v_2, v_3) de E e $\theta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} a(v_1) &= \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2 \\ a(v_2) &= -\sin(\theta)v_1 + \cos(\theta)v_2 \\ a(v_3) &= v_3. \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

(b) Dado $X \in \mathfrak{so}(E)$, existe uma base ortonormal e positiva (v_1, v_2, v_3) de E e $\theta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} X(v_1) &= \theta v_2 \\ X(v_2) &= -\theta v_1 \\ X(v_3) &= 0. \end{aligned} \tag{1.7.2}$$

(c) Se $X \in \mathfrak{so}(3)$ satisfaz (1.7.2) para uma determinada base de E , então e^X satisfaz (1.7.1) para a mesma base.

(d) $\exp : \mathfrak{so}(E) \rightarrow SO(E)$ é sobrejetiva.

Demonstração. (c) Não é difícil mostrar, por indução, que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} X^{2k}(v_1) &= (-1)^k \theta^{2k} v_1 \\ X^{2k+1}(v_1) &= (-1)^k \theta^{2k+1} v_2, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} e^X(v_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k(v_1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \theta^{2k} v_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \theta^{2k+1} v_2 \\ &= \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2. \end{aligned}$$

Isso mostra a primeira das equações de (1.7.1). Para a segunda, basta proceder de maneira análoga, e, para a terceira, notar que $X^0(v_3) = v_3$ e que $X^k(v_3) = 0$ para $k \geq 1$.

(d) Dado $a \in SO(E)$, seja β uma base positiva de E de modo que vale (1.7.1). Definindo $X \in \mathfrak{so}(E)$ por (1.7.2) usando a mesma base, concluímos que $e^X = a$. \square

Observação: Na parte (c) do teorema, mostramos, em essência, que se $X \in \mathfrak{so}(E)$ é dado por

$$[X]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta & 0 \\ \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

para alguma base β de E (não necessariamente positiva), então

$$[e^X]_\beta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Seja $a \in SO(E)$ e β uma base ortonormal positiva de E para a qual valem as relações em (1.7.1). Nessas condições, chamamos o operador a de *rotação anti-horária de ângulo θ e eixo v_3* . Por causa disso e das partes (c) e (d) do teorema, os elementos de $\mathfrak{so}(E)$ são chamados de *rotações infinitesimais*.

Vamos considerar, agora, que $E = \mathbb{R}^3$. Para simplificar um pouco a notação, denotamos o grupo $SO(3)$ por $SO(3)$ e a sua álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$, por $\mathfrak{so}(3)$. Na base canônica, todos os operadores X de $\mathfrak{so}(3)$ têm a sua matriz na forma

$$[X] = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R},$$

o que nos leva a considerar a base (E_1, E_2, E_3) de $\mathfrak{so}(E)$ dada pelas seguintes matrizes:

$$[E_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [E_2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [E_3] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7.3)$$

Mostramos, no Apêndice B, que o isomorfismo linear $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ determinado por $\phi(e_i) = E_i$ é um isomorfismo de álgebras de Lie, lembrando que o colchete de Lie em \mathbb{R}^3 é dado pelo produto vetorial — os detalhes são feitos no exemplo B.10. Denote por φ a inversa de ϕ .

Proposição 1.7.2. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$ e $a \in SO(3)$. Então,*

- (a) $\varphi([X, Y]) = \varphi(X) \times \varphi(Y)$;
- (b) $\varphi([X, Y]) = X(\varphi(Y))$;
- (c) $\varphi(\text{Ad}(a)X) = a(\varphi(X))$.

Demonstração. (a) Segue do fato de φ ser a inversa de um isomorfismo de álgebras de Lie que φ também é um tal isomorfismo.

- (b) Escreva $X = x^1 E_1 + x^2 E_2 + x^3 E_3$ e considere a função $T_X: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$T_X(u) = \varphi(X) \times u, \quad \forall u \in \mathbb{R}^3.$$

Note que T_X é linear. Calculando a matriz de T_X na base canônica, temos

$$\begin{aligned} T_X(e_1) &= \varphi(X) \times e_1 \\ &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x^1 & x^2 & x^3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= x^3 e_2 - x^2 e_3 \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} T_X(e_2) &= -x^3 e_1 + x^1 e_3 \\ T_X(e_3) &= x^2 e_1 - x^1 e_2. \end{aligned}$$

Com isso,

$$[T_X] = \begin{pmatrix} 0 & -x^3 & x^2 \\ x^3 & 0 & -x^1 \\ -x^2 & x^1 & 0 \end{pmatrix} = [X],$$

o que implica $T_X = X$. Portanto,

$$\varphi([X, Y]) = \varphi(X) \times \varphi(Y) = T_X(\varphi(Y)) = X(\varphi(Y)).$$

- (c) Como $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow SO(3)$ é sobrejetiva, seja $Z \in \mathfrak{so}(3)$ tal que $a = e^Z$. Então,

$$\text{Ad}(a) = \text{Ad}(e^Z) = e^{\text{ad}(Z)},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \varphi(\text{Ad}(a)X) &= \varphi(e^{\text{ad}(Z)}X) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi(\text{ad}(Z)^k X). \end{aligned}$$

Usando a parte (b), não é difícil mostrar que $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\varphi(\text{ad}(Z)^k X) = Z^k(\varphi(X)),$$

e temos

$$\begin{aligned} \varphi(\text{Ad}(a)X) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} Z^k(\varphi(X)) \\ &= e^Z(\varphi(X)) \\ &= a(\varphi(X)). \quad \square \end{aligned}$$

Vamos considerar, agora, a função $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow SO(3)$ dada por $\Phi = \exp \circ \phi$.

Teorema 1.7.3. (a) Para cada $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, $\Phi(u)$ é a rotação anti-horária de ângulo $\theta = \|u\|$ de eixo u .

- (b) Φ é sobrejetiva e $\Phi(u) = \Phi(v)$ sse u e v são paralelos e $\|u - v\| = 2n\pi$, com $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. (a) Precisamos encontrar uma base (v_1, v_2, v_3) de \mathbb{R}^3 ortonormal e positiva tal que

$$\begin{aligned}\Phi(u)(v_1) &= \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2 \\ \Phi(u)(v_2) &= -\sin(\theta)v_1 + \cos(\theta)v_2 \\ \Phi(u)(v_3) &= v_3.\end{aligned}$$

Para tanto, primeiro observe que, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tais que $\|x\| = \|y\|$, existe $a \in SO(3)$ tal que $a(x) = y$; a saber, a pode ser escolhido como a rotação anti-horária de ângulo $\arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}\right)$ e eixo $x \times y$. Com isso, seja $a \in SO(3)$ tal que $u = a(\theta e_3)$. Sejam $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ dados por $v_i = a(e_i)$. Segue de $a \in SO(3)$ que (v_1, v_2, v_3) é uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 .

Como

$$\begin{aligned}u &= a(\theta e_3) \\ &= a(\varphi(\theta E_3)) \\ &= \varphi(\text{Ad}(a)(\theta E_3)),\end{aligned}$$

então

$$\phi(u) = \text{Ad}(a)(\theta E_3) = a(\theta E_3)a^{-1}$$

e, portanto,

$$\Phi(u) = e^{\phi(u)} = e^{a(\theta E_3)a^{-1}} = ae^{\theta E_3}a^{-1}.$$

A partir desta equação, é fácil mostrar que (v_1, v_2, v_3) satisfaz as identidades desejadas. Façamos, para ilustrar, a primeira delas:

$$\begin{aligned}\Phi(u)(v_1) &= ae^{\theta E_3}a^{-1}(a(e_1)) \\ &= ae^{\theta E_3}(e_1) \\ &= a(\cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2) \\ &= \cos(\theta)v_1 + \sin(\theta)v_2.\end{aligned}$$

- (b) A sobrejetividade é imediata do teorema 1.7.1. Suponha que u e v são paralelos, isto é, que $u = \lambda v$, e que $\|u - v\| = 2n\pi$. De $u = \lambda v$ vem que $\Phi(u)$ e $\Phi(v)$ são rotações ao redor do mesmo eixo, de modo que existe uma base ortonormal e positiva β de \mathbb{R}^3 tal que

$$[\Phi(u)]_\beta = \begin{pmatrix} \cos \|u\| & -\sin \|u\| & 0 \\ \sin \|u\| & \cos \|u\| & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\Phi(v)]_\beta = \begin{pmatrix} \cos \|v\| & -\sin \|v\| & 0 \\ \sin \|v\| & \cos \|v\| & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.7.4)$$

Como u e v são paralelos, então $\|u - v\| = \left| \|u\| - \|v\| \right|$; logo,

$$\left| \|u\| - \|v\| \right| = 2n\pi \Rightarrow \|u\| = \|v\| + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Substituindo estes valores em (1.7.4), concluímos que $\Phi(u) = \Phi(v)$.

Reciprocamente, se $\Phi(u) = \Phi(v)$, então os eixos de rotação são o mesmo, e segue que u e v são paralelos. Com isso, existe uma base ortonormal e positiva de \mathbb{R}^3 para a qual vale (1.7.4). Logo,

$$\begin{aligned} \cos \|u\| &= \cos \|v\| \\ \sin \|u\| &= \sin \|v\|, \end{aligned}$$

isto é, $\|u\| = \|v\| + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. Disso é fácil ver que $\|u - v\| = \left| \|u\| - \|v\| \right| = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$. □

Este resultado pode ser utilizado para obter uma imagem mais concreta do grupo $SO(3)$. Considere o conjunto

$$B = \overline{B(0, \pi)} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Decorre da parte (b) do teorema anterior que

$$\Phi : B \rightarrow SO(3)$$

é sobrejetiva, injetiva no interior de B e, na fronteira, ela coincide nos pontos antípodas. Isso define a seguinte relação de equivalência em B :

$$u \sim v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v & , \text{ se } \|u\| < \pi \text{ ou } \|v\| < \pi \\ u = \pm v & , \text{ se } \|u\| = \pi \text{ ou } \|v\| = \pi. \end{cases}$$

O quociente de B por esta relação, que denotamos por \tilde{B} , pode-se mostrar, é homeomorfo a \mathbb{RP}^3 (na primeira seção do capítulo 2 fazemos uma descrição detalhada deste espaço topológico). Além disso, a função

$$\widetilde{\exp} : \tilde{B} \rightarrow SO(3)$$

definida por $\widetilde{\exp}(\bar{u}) = \Phi(u)$, em que \bar{u} denota a classe de u , é uma bijeção, que, também pode ser demonstrado, é um homeomorfismo. Isso identifica $SO(3)$ com \mathbb{RP}^3 .

$SU(2)$

Vamos trabalhar, agora, com o grupo

$$SU(2) = \{a \in GL(2, \mathbb{C}) : a^\dagger a = I_2, \det(a) = 1\},$$

que é o equivalente matricial de

$$SU(\mathbb{C}^2) = \{a \in GL(\mathbb{C}^2) : a^* a = \text{id}_{\mathbb{C}^2}, \det(a) = 1\}.$$

Lembramos que a^\dagger denota a transposta conjugada de a , e a condição $a^\dagger a = I_2$ pode ser reescrita como $a^\dagger = a^{-1}$. Escrevendo

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix},$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, temos que $a^\dagger = a^{-1}$ traduz-se por

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma} \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Como $\det(a) = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$, então

$$\begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

de modo que $\delta = \bar{\alpha}$ e $\gamma = -\bar{\beta}$. Logo, $a \in SU(2)$ sse

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \text{ com } \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1.$$

A partir destas relações, pode-se mostrar que $SU(2)$ é homeomorfo a

$$\mathbb{S}^3 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1\}.$$

Sabemos da seção 1.3 que a álgebra de Lie de $SU(2)$ é

$$\mathfrak{su}(2) = \{X \in M(2, \mathbb{C}) : X^\dagger = -X, \text{tr}(X) = 0\}.$$

Não é difícil mostrar que os elementos de $\mathfrak{su}(2)$ têm a seguinte forma geral:

$$X = \begin{pmatrix} \mathbf{i}x^3 & -x^1 + \mathbf{i}x^2 \\ x^1 + \mathbf{i}x^2 & -\mathbf{i}x^3 \end{pmatrix},$$

em que $x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}$. Isso implica que $\dim(\mathfrak{su}(2)) = 3$. Considere a base (F_1, F_2, F_3) de $\mathfrak{su}(2)$ dada por

$$F_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{i}/2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{i}/2 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{i}/2 \\ \mathbf{i}/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} [F_1, F_2] &= F_3 \\ [F_2, F_3] &= F_1 \\ [F_3, F_1] &= F_2, \end{aligned}$$

o que significa que as constantes de estrutura de $\mathfrak{su}(2)$ com relação a esta base são as mesmas de \mathbb{R}^3 com relação à base canônica. Portanto, a função $\psi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$\psi(x^1 F_1 + x^2 F_2 + x^3 F_3) = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie. Por esses motivos, consideramos (F_1, F_2, F_3) como a base canônica de $\mathfrak{su}(2)$.

Lembramos que, sempre que E é um espaço vetorial real de dimensão finita com produto interno, podemos definir os grupos $O(E)$ e $SO(E)$, cujas álgebras de Lie são $\mathfrak{so}(E)$. Vamos mostrar à frente que $\mathfrak{su}(2) \simeq \mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$ e obter resultados importantes a partir deste isomorfismo. No entanto, precisamos, antes, definir um produto interno em $\mathfrak{su}(2)$.

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathbb{R}$ o produto interno euclidiano determinado pela base (F_1, F_2, F_3) , isto é, dados $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$, escrevendo

$$\begin{aligned} X &= x^1 F_1 + x^2 F_2 + x^3 F_3 \\ Y &= y^1 F_1 + y^2 F_2 + y^3 F_3, \end{aligned}$$

então,

$$\langle X, Y \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3.$$

Proposição 1.7.4. (a) (F_1, F_2, F_3) é uma base ortonormal com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

(b) $\langle X, Y \rangle = 2\text{tr}(X^\dagger Y)$, $\forall X, Y \in \mathfrak{su}(2)$.

(c) A aplicação $\psi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é um isomorfismo de espaços de Hilbert.⁹

Demonstração. O itens (a) e (c) são consequência imediata da definição. Para verificar (b), escreva

$$\begin{aligned} X &= x^1 F_1 + x^2 F_2 + x^3 F_3 \\ Y &= y^1 F_1 + y^2 F_2 + y^3 F_3. \end{aligned}$$

Temos, explicitamente, que

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{i}x^3 & -x^1 + \mathbf{i}x^2 \\ x^1 + \mathbf{i}x^2 & -\mathbf{i}x^3 \end{pmatrix}, \quad Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{i}y^3 & -y^1 + \mathbf{i}y^2 \\ y^1 + \mathbf{i}y^2 & -\mathbf{i}y^3 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$X^\dagger Y = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sum_i x^i y^i + \mathbf{i}(x^3 y^2 - x^2 y^3) & * \\ * & \sum_i x^i y^i - \mathbf{i}(x^3 y^2 - x^2 y^3) \end{pmatrix},$$

em que $*$ denota entradas possivelmente não nulas, mas que são irrelevantes para o cálculo do traço de $X^\dagger Y$. Portanto,

$$\text{tr}(X^\dagger Y) = \frac{1}{2}(x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3),$$

o que fornece a identidade desejada. \square

⁹Um *espaço de Hilbert* é um espaço vetorial H sobre \mathbb{R} ou \mathbb{C} munido de um produto interno que é completo na métrica definida por este produto. Como todos os espaços com que trabalhamos são de dimensão finita, a última condição é redundante. Se H e K são espaços de Hilbert, um *isomorfismo* entre H e K é um isomorfismo linear $T : H \rightarrow K$ tal que $\forall x, y \in H$ vale $\langle T(x), T(y) \rangle_K = \langle x, y \rangle_H$.

Com isso, podemos considerar a álgebra de Lie $\mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$. Seja (E_1, E_2, E_3) a base de $\mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$ cujas matrizes com relação a (F_1, F_2, F_3) são dadas por (1.7.3) e seja $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$ o isomorfismo de álgebras de Lie determinado por

$$\phi(e_i) = E_i.$$

Com isso,

$$\eta = \phi \circ \psi : \mathfrak{su}(2) \rightarrow \mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$$

é um isomorfismo de álgebras de Lie. Observe que, da definição de (E_1, E_2, E_3) , temos $\forall i, j$ que

$$E_i(F_j) = [F_i, F_j] = [\eta^{-1}(E_i), F_j].$$

Por linearidade, isso significa que $\forall T \in \mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$ e $\forall X \in \mathfrak{su}(2)$

$$T(X) = [\eta^{-1}(T), X];$$

em particular, $\forall X, Y \in \mathfrak{su}(2)$

$$\eta(X)(Y) = [\eta^{-1}(\eta(X)), Y] = [X, Y].$$

Portanto, $\eta = \text{ad}$. Isso mostra o seguinte resultado:

Teorema 1.7.5. (a) Dados $T \in \mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$ e $X \in \mathfrak{su}(2)$, temos

$$T(X) = [\eta^{-1}(T), X].$$

(b) $\eta = \text{ad}$.

Seja $G \subseteq GL(\mathfrak{su}(2))$ um grupo linear cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$. Sabemos que ao menos dois grupos satisfazem esta condição: $O(\mathfrak{su}(2))$ e $SO(\mathfrak{su}(2))$. De qualquer forma, considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & & G \\ \uparrow \text{exp} & & \uparrow \text{exp} \\ \mathfrak{su}(2) & \xrightarrow{\text{ad}} & \mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2)) \end{array}$$

Queremos completar o diagrama acima com uma função $f : SU(2) \rightarrow G$ que o torne comutativo: em vista da seção 1.5, a escolha mais natural é $f = \text{Ad}$. Desta forma, defina $\text{Ad} : SU(2) \rightarrow GL(\mathfrak{su}(2))$ (escolhemos este contradomínio mais amplo para evitar problemas de definição).

Proposição 1.7.6. Para cada $a \in SU(2)$, tem-se que $\text{Ad}(a) \in O(\mathfrak{su}(2))$.

Demonstração. Sejam $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$. Precisamos mostrar que

$$\langle \text{Ad}(a)X, \text{Ad}(a)Y \rangle = \langle X, Y \rangle.$$

De fato, de acordo com a proposição 1.7.4, parte (b),

$$\begin{aligned} \langle \text{Ad}(a)X, \text{Ad}(a)Y \rangle &= 2\text{tr} \left((aXa^\dagger)^\dagger \cdot (aYa^\dagger) \right) \\ &= 2\text{tr} (aX^\dagger Ya^\dagger) \\ &= 2\text{tr} (X^\dagger Ya^\dagger a) \\ &= 2\text{tr} (X^\dagger Y) \\ &= \langle X, Y \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

Queremos mostrar que $\text{Ad}(SU(2)) \subseteq SO(\mathfrak{su}(2))$. Para isso, precisamos do seguinte resultado:

Proposição 1.7.7. (a) Dado $a \in SU(2)$, existem $\theta \in \mathbb{R}$ e $b \in U(2)$ de modo que

$$a = b \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} b^\dagger.$$

(b) $\exp : \mathfrak{su}(2) \rightarrow SU(2)$ é sobrejetiva.

Demonstração. (a) Dado $a \in SU(2)$, escreva

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1$$

com $\alpha = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Como $\text{tr}(a) = 2x$, o polinômio característico de a é

$$p_a(\lambda) = \lambda^2 - 2x\lambda + 1.$$

Logo, sendo $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ os autovalores de a , temos que $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$. Além disso, a é uma matriz unitária, de modo que

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1.$$

Portanto, existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= e^{i\theta} \\ \lambda_2 &= \overline{\lambda_1} = e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

Com isso, segue do Teorema Espectral para matrizes normais (ref. (LIMA, 2001)) que existe $b \in U(2)$ tal que

$$\begin{aligned} a &= b \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} b^\dagger \\ &= b \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} b^\dagger. \end{aligned}$$

(b) Dado $a \in SU(2)$, sejam $\theta \in \mathbb{R}$ e $b \in U(2)$ tais que

$$a = b \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} b^\dagger$$

e tome

$$X = b \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} b^\dagger.$$

Observe que, como $b^\dagger = b^{-1}$, temos $e^X = a$, de modo que apenas precisamos verificar que $X \in \mathfrak{su}(2)$. De fato,

$$X^\dagger = b \begin{pmatrix} -i\theta & 0 \\ 0 & i\theta \end{pmatrix} b^\dagger = -X$$

e

$$\begin{aligned} \text{tr}(X) &= \text{tr} \left(b \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} b^\dagger \right) \\ &= \text{tr} \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix} \\ &= 0. \quad \square \end{aligned}$$

Com base neste resultado, podemos finalmente mostrar:

Teorema 1.7.8. *A função $\text{Ad} : SU(2) \rightarrow O(\mathfrak{su}(2))$ é um homomorfismo de grupo contínuo cuja imagem é $SO(\mathfrak{su}(2))$ e cujo núcleo é $\{\pm I_2\}$.*

Demonstração. Já sabemos da seção 1.5 que Ad é um homomorfismo de grupos contínuo. Para ver que $\text{Ad}(SU(2)) = SO(\mathfrak{su}(2))$, primeiro tome $a \in SU(2)$. Seja $X \in \mathfrak{su}(2)$ tal que $a = e^X$. Logo,

$$\text{Ad}(a) = \text{Ad}(e^X) = e^{\text{ad}(X)},$$

de modo que

$$\begin{aligned} \det(\text{Ad}(a)) &= \det(e^{\text{ad}(X)}) \\ &= e^{\text{tr}(\text{ad}(X))}. \end{aligned}$$

Como $\text{ad}(X) \in \mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$, então $\text{tr}(\text{ad}(X)) = 0$, do que segue $\det(\text{Ad}(a)) = 1$, isto é, $\text{Ad}(a) \in SO(\mathfrak{su}(2))$. Reciprocamente, dado $b \in SO(\mathfrak{su}(2))$, seja $Y \in \mathfrak{so}(\mathfrak{su}(2))$ tal que $b = e^Y$. Tome $X = \text{ad}^{-1}(Y) \in \mathfrak{su}(2)$ e $a = e^X \in SU(2)$. Então,

$$\text{Ad}(a) = \text{Ad}(e^X) = e^{\text{ad}(X)} = e^Y = b.$$

Para concluirmos a demonstração, falta apenas determinar o núcleo de Ad . Precisamos do seguinte lema:

Lema 1.7.9. *Para cada $Z \in M(2, \mathbb{C})$, existem $\alpha \in \mathbb{C}$ e $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ tais que*

$$Z = \alpha I_2 + X + iY.$$

Demonstração. Sejam

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}\text{tr}(Z) \in \mathbb{C} \\ X &= \frac{1}{2}(Z - \alpha I_2 - Z^\dagger + \bar{\alpha} I_2) \\ Y &= -\frac{i}{2}(Z - \alpha I_2 + Z^\dagger - \bar{\alpha} I_2).\end{aligned}$$

É fácil ver que $Z = \alpha I_2 + X + iY$, e verificar que $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ é uma tarefa puramente operacional que deixamos para o leitor. \square

Com isso, seja $a \in \ker(\text{Ad})$. Então, $\text{Ad}(a) = \text{id}_{\mathfrak{su}(2)}$, o que significa que $aX = Xa$, $\forall X \in \mathfrak{su}(2)$. Pelo lema, isso implica que $aX = Xa$, $\forall X \in M(2, \mathbb{C})$, do que segue $a = \lambda I_2$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Portanto,

$$1 = \det(a) = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm 1,$$

de modo que $a = \pm I_2$. \square

Um comentário final: é possível mostrar que $SU(2)$ é isomorfo ao grupo dos números quatérnions unitários. Isso determina, através de isomorfismos, uma correspondência entre a esfera \mathbb{S}^3 e o grupo $SO(3)$, o que nos permite estudar as rotações do espaço euclidiano usando o anel dos quatérnions.

O Referencial de Frenet

Veamos uma aplicação das relações que exploramos entre $SO(3)$ e $\mathfrak{so}(3)$ no estudo da geometria das curvas espaciais. Seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por comprimento de arco, isto é, tal que $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$, $\forall s \in I$. O *referencial de Frenet* de γ é a curva $s \in I \mapsto (T(s), N(s), B(s)) \in (\mathbb{R}^3)^3$ dada por

$$\begin{aligned}T(s) &= \dot{\gamma}(s) \\ N(s) &= \frac{\dot{T}(s)}{\|\dot{T}(s)\|} \\ B(s) &= T(s) \times N(s),\end{aligned}$$

que é suave. Como $(T(s), N(s), B(s))$ é uma base ortonormal positiva de \mathbb{R}^3 , $\forall s \in I$, podemos definir uma curva diferenciável $F : I \rightarrow SO(3)$ por

$$[F(s)] = \begin{pmatrix} T^1(s) & N^1(s) & B^1(s) \\ T^2(s) & N^2(s) & B^2(s) \\ T^3(s) & N^3(s) & B^3(s) \end{pmatrix}.$$

Lembramos que

$$\begin{aligned}\dot{T}(s) &= \kappa(s)N(s) \\ \dot{N}(s) &= -\kappa(s)T(s) - \tau(s)B(s) \\ \dot{B}(s) &= \tau(s)N(s),\end{aligned}$$

em que κ é a *curvatura* de γ e τ , a *torção*. Estas equações podem ser reescritas na forma

$$\dot{F}(s) = F(s)\omega(s), \quad (1.7.5)$$

em que $\omega : I \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ é dada por

$$[\omega(s)] = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{pmatrix}.$$

Isso implica, em particular, que

$$\dot{F}(s) \in F(s)\mathfrak{so}(3), \quad \forall s \in I,$$

isto é, que F é uma curva tangente a $SO(3)$.

Essas observações mostram uma relação interessante entre o estudo da geometria das curvas espaciais e o dos grupos lineares. Uma maneira de explorar esta relação é determinar a curva γ sabendo-se κ , τ e condições iniciais $\gamma(s_0)$, $F(s_0)$. Em linhas gerais, o processo é o seguinte:

- Conhecidas as funções κ e τ , a curva ω fica determinada;
- Usando a condição inicial $F(s_0)$, resolve-se a equação diferencial (1.7.5) para obter $F(s)$ (esta é a parte difícil!);
- Com $F(s)$ unicamente determinada, é fácil ver que

$$\gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^s T(\sigma) d\sigma$$

é a única curva regular parametrizada por comprimento de arco que satisfaz às condições dadas.

O conhecimento a respeito da estrutura dos grupos lineares (em particular, de $SO(3)$) é usado na resolução de (1.7.5), ou para, pelo menos, garantirmos que existe uma tal solução (única de preferência). A análise deste problema adentra a teoria de equações diferenciais em grupos lineares, o que foge muito da abrangência deste trabalho. O leitor que estiver interessado pode consultar (CARMO, 2005) para uma discussão deste problema em termos mais elementares, e (LEE, 2003) para um estudo aprofundado acerca de equações diferenciais em variedades diferenciáveis¹⁰. Sugerimos também a leitura de (GUGGENHEIMER, 1963, 1977), que apresenta a Geometria Diferencial do ponto de vista de Felix Klein (programa de Erlangen).

¹⁰Mostraremos, no terceiro capítulo, que todo grupo linear admite uma estrutura diferenciável definida através da função exponencial.

Capítulo 2

Variedades Diferenciáveis

As variedades diferenciáveis são estruturas que permitem a formulação dos conceitos do Cálculo em espaços mais gerais do que o \mathbb{R}^n . Além disso, esta teoria tem um papel fundamental em muitas áreas da Matemática, como Geometria, Topologia e Equações Diferenciais.

O leitor deve estar consciente de que o Cálculo é, intrinsecamente, de caráter *local*, ou seja, os seus resultados descrevem o comportamento das funções apenas em vizinhanças dos pontos. Este é um fator crucial para a concepção das variedades, pois o que se faz não é mais do que considerar espaços — de modo geral, topológicos — que, localmente, têm um comportamento semelhante ao do \mathbb{R}^n .

Os tópicos contemplados neste capítulo servem como uma introdução à teoria das variedades diferenciáveis. O enfoque adotado visa, principalmente, desenvolver as ferramentas necessárias para a compreensão dos conceitos básicos da teoria dos grupos de Lie, apresentados no capítulo 3.

2.1 Estruturas Diferenciáveis

O passo inicial para o estudo das variedades diferenciáveis é o conceito de *estrutura diferenciável*, explorado nesta seção. Começamos trabalhando com conjuntos que, a princípio, não possuem topologia alguma: fazemos isso para obter o grau de generalidade necessário à análise da estrutura diferenciável dos grupos lineares — assunto abordado no capítulo 3.

Definição 2.1.1. *Seja X um conjunto não-vazio. Uma carta local (ou sistema de coordenadas) em X é um par (U, ϕ) , em que*

- (i) $U \subseteq X$ é não-vazio;
- (ii) $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva;
- (iii) $\phi(U)$ é aberto.

O conjunto U é chamado vizinhança coordenada de X .

Exemplo 2.1.2. Em \mathbb{S}^1 tome $U = \{(x, y) : y \neq 1\}$. Defina $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(x, y) = \frac{x}{1 - y},$$

a chamada *projeção estereográfica* (veja a figura abaixo). Esta função é bijetiva, com inversa $\psi : \mathbb{R} \rightarrow U$ dada por

$$\psi(u) = \left(\frac{2u}{u^2 + 1}, \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \right).$$

Isso faz de (U, ϕ) uma carta em \mathbb{S}^1 .

△

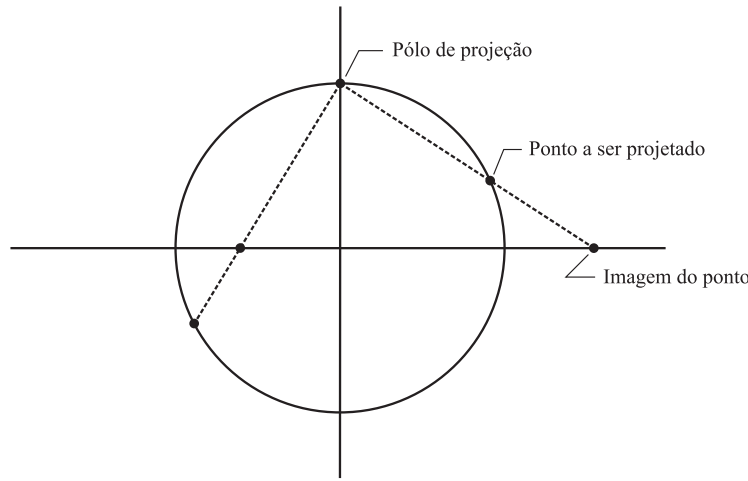


Figura 2.1: A projeção estereográfica.

Exemplo 2.1.3. Considere a seguinte relação em $\mathbb{R}_*^{n+1} := \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*; u = \lambda v.$$

É fácil ver que \sim é uma relação de equivalência em \mathbb{R}_*^{n+1} . Defina $\mathbb{RP}^n := \mathbb{R}_*^{n+1} / \sim$ e denote por $[x^1, \dots, x^{n+1}]$ a classe de equivalência de (x^1, \dots, x^{n+1}) . Para cada $i = 1, \dots, n+1$ sejam

$$U_i = \{[x^1, \dots, x^{n+1}] \in \mathbb{RP}^n : x^i \neq 0\}$$

e $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\phi_i [x^1, \dots, x^{n+1}] = \frac{1}{x^i} (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{n+1}).$$

Esta função está bem definida, pois dados $x, y \in \mathbb{R}_*^{n+1}$ tais que $[x], [y] \in U_i$ e $[x] = [y]$, então $x^i, y^i \neq 0$ e existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tal que $x^j = \lambda y^j, \forall j$. Daí vem que para cada $j \neq i$

$$\frac{x^j}{x^i} = \frac{\lambda y^j}{\lambda y^i} = \frac{y^j}{y^i},$$

donde $\phi_i[x] = \phi_i[y]$.

Temos também que ϕ_i é bijetiva, pois a função $\psi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow U_i$ definida por

$$\psi_i(x^1, \dots, x^n) = [x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^n],$$

é claramente a inversa de ϕ_i . Isso faz de (U_i, ϕ_i) uma carta em \mathbb{RP}^n . Note que

$$\mathbb{RP}^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i,$$

o que significa que \mathbb{RP}^n pode ser coberto com vizinhanças coordenadas. \triangle

Sejam (U, ϕ) e (V, ψ) cartas locais em um conjunto X , com $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\psi(V) \subseteq \mathbb{R}^m$. As *transições de cartas* são as funções

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m &\longrightarrow \phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \\ \psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n &\longrightarrow \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m, \end{aligned}$$

que são obviamente uma inversa da outra. Em muitas situações é desejável que estas transições sejam homeomorfismos (como no estudo das variedades topológicas), mas para os nossos propósitos precisamos de mais: queremos que elas sejam suaves.

Definição 2.1.4. *Sejam (U, ϕ) e (V, ψ) cartas locais em X . Dizemos que (U, ϕ) e (V, ψ) são compatíveis se*

(i) $\phi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^m$ são abertos;

(ii) as transições de cartas são diferenciáveis.

Observação: A escolha da classe de diferenciabilidade das transições é arbitrária. Caso escolhêssemos \mathcal{C}^k com $k < \infty$, certas anomalias surgiriam na estrutura dos espaços tangentes (os quais veremos adiante). Poderíamos também ter posto \mathcal{C}^ω (analítica), mas neste caso não existem funções *bump*, uma ferramenta importante para nós. Para resolver este problema, teríamos, então, que estudar as chamadas *partições da unidade*, o que nos desviaria dos objetivos deste trabalho.

Note que se (U, ϕ) e (V, ψ) são compatíveis e $U \cap V \neq \emptyset$, temos necessariamente $n = m$. De fato, neste caso as transições são difeomorfismos entre abertos não-vazios de \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^m , o que só é possível se $n = m$. Por causa disso, a partir de agora vamos exigir que todas as cartas em X tenham como contradomínio um \mathbb{R}^n fixado.

Exemplo 2.1.5. Considere as cartas (U_i, ϕ_i) em \mathbb{RP}^n definidas no exemplo anterior e verifiquemos a compatibilidade entre elas. Sejam i, j tais que $i < j$

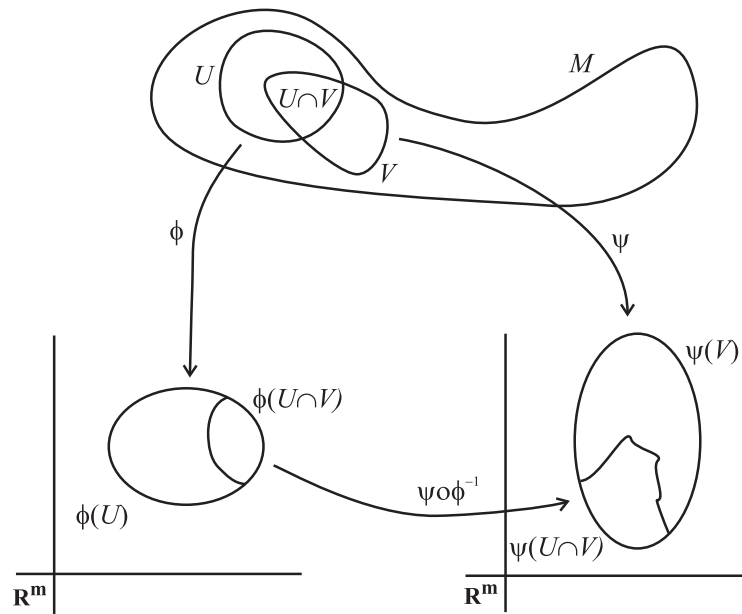


Figura 2.2: Transição de cartas.

(caso $i = j$ não há o que fazer, e o caso $i > j$ é análogo ao que faremos). Então,

$$\begin{aligned}\phi_i(U_i \cap U_j) &= \{x \in \mathbb{R}^n : x^{j-1} \neq 0\} \\ \phi_j(U_i \cap U_j) &= \{x \in \mathbb{R}^n : x^i \neq 0\},\end{aligned}$$

que são abertos. Para cada $x \in \phi_i(U_i \cap U_j)$

$$\begin{aligned}\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x) &= \phi_j [x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^n] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x^{j-1}} (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^i, \dots, x^{j-2}, x^j, \dots, x^n), & \text{se } i < j-1 \\ \frac{1}{x^i} (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n), & \text{se } i = j-1. \end{cases}\end{aligned}$$

Analogamente, para cada $y \in \phi_j(U_i \cap U_j)$

$$\begin{aligned}\phi_i \circ \phi_j^{-1}(y) &= \phi_i [x^1, \dots, x^{j-1}, 1, x^j, \dots, x^n] \\ &= \begin{cases} \frac{1}{x^i} (x^1, \dots, x^{i-1}, x^{i+1}, \dots, x^{j-1}, 1, x^j, \dots, x^n), & \text{se } i < j-1 \\ \frac{1}{x^i} (x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^j, \dots, x^n), & \text{se } i = j-1. \end{cases}\end{aligned}$$

Estas funções são claramente de classe \mathcal{C}^∞ , o que faz com que (U_i, ϕ_i) e (U_j, ϕ_j) sejam compatíveis. \triangle

Definição 2.1.6. Um atlas n -dimensional para X é um conjunto $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ de cartas em X tal que

$$(i) \quad \phi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \forall \alpha \in A;$$

- (ii) para cada $\alpha, \beta \in A$ as cartas (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) são compatíveis;
- (iii) para cada $x \in X$ existe $\alpha \in A$ tal que $x \in U_\alpha$, i.e., $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$.

Exemplo 2.1.7. Segue dos exemplos anteriores que

$$\{(U_i, \phi_i) : i = 1, \dots, n+1\}$$

é um atlas n -dimensional para \mathbb{RP}^n . △

Exemplo 2.1.8. Vamos construir um atlas n -dimensional para a esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$, em que $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em \mathbb{R}^{n+1} . Sejam

$$\begin{aligned} U_1 &= \{x \in \mathbb{S}^n : x^{n+1} \neq 1\} \\ U_2 &= \{x \in \mathbb{S}^n : x^{n+1} \neq -1\} \end{aligned}$$

e defina $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \frac{1}{1 - x^{n+1}} (x^1, \dots, x^n) \\ \phi_2(x) &= \frac{1}{1 + x^{n+1}} (x^1, \dots, x^n). \end{aligned}$$

As funções $\psi_1, \psi_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ definidas por

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{\|x\|^2 + 1} (2x^1, \dots, 2x^n, \|x\|^2 - 1) \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{\|x\|^2 + 1} (2x^1, \dots, 2x^n, 1 - \|x\|^2) \end{aligned}$$

são as inversas de ϕ_1 e ϕ_2 , respectivamente. Isto mostra que (U_1, ϕ_1) e (U_2, ϕ_2) são cartas em \mathbb{S}^n . A compatibilidade entre elas segue de

$$\phi_1(U_1 \cap U_2) = \phi_2(U_1 \cap U_2) = \mathbb{R}_*^n$$

e

$$\phi_1 \circ \phi_2^{-1}(x) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(x) = \frac{x}{\|x\|^2}.$$

É fácil ver que $\mathbb{S}^n = U_1 \cup U_2$, o que faz de $\{(U_1, \phi_1); (U_2, \phi_2)\}$ um atlas para \mathbb{S}^n . △

Todos os exemplos que vimos de cartas e atlas eram em conjuntos que possuem topologias canônicas: no caso de \mathbb{RP}^n , a topologia quociente; no caso de \mathbb{S}^n , a topologia induzida de \mathbb{R}^{n+1} . Estudar como as cartas e atlas em um conjunto X se comportam perante uma topologia pré-fixada é mais do que mera curiosidade.

Definição 2.1.9. Uma carta local em um espaço topológico X é um par (U, ϕ) , em que

- (i) $U \subseteq X$ é um conjunto aberto e não-vazio;
- (ii) $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um homeomorfismo sobre a sua imagem.

As noções de compatibilidade entre cartas e de atlas permanecem inalteradas.

Exemplo 2.1.10. Seja E um espaço vetorial real de dimensão finita e considere o subconjunto $GL(E)$ de $\mathcal{L}(E)$. Fixada uma base ordenada β em E , considere a aplicação $\phi_\beta : GL(E) \rightarrow M(n, \mathbb{R})$ que associa a cada $a \in GL(E)$ a matriz de a na base β . A imagem de ϕ_β é $GL(n, \mathbb{R})$, que é um subconjunto aberto de $M(n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^{n^2}$, e, sendo a restrição de um isomorfismo linear, é imediato que ϕ_β é um homeomorfismo. Isso mostra que $(GL(E), \phi_\beta)$ é uma carta em $GL(E)$.

Dadas duas cartas $(GL(E), \phi_\beta)$ e $(GL(E), \phi_{\beta'})$, a transição entre elas é dada por

$$\phi_\beta \circ \phi_{\beta'}^{-1}(A) = BAB^{-1}, \quad \forall A \in GL(n, \mathbb{R})$$

em que B é a matriz de passagem de β' para β . É imediato que esta função é um difeomorfismo, de modo que $(GL(E), \phi_\beta)$ e $(GL(E), \phi_{\beta'})$ são compatíveis para quaisquer bases β, β' . Portanto,

$$\mathcal{A} = \{(GL(E), \phi_\beta) : \beta \text{ é base de } E\}$$

é um atlas em $GL(E)$. △

Deveríamos, agora, refazer os exemplos anteriores e mostrar que as cartas lá exibidas satisfazem estas condições, mas o nosso espaço é limitado e deixamos isso como exercício para o leitor.

Teorema 2.1.11. Sejam X um conjunto e \mathcal{A} um atlas n -dimensional em X . Então, existe um única topologia em X tal que $\forall (U, \phi) \in \mathcal{A}$ tem-se que U é aberto e ϕ é um homeomorfismo. Ademais, se \mathcal{A} possui a propriedade de que $\forall x, y \in X, x \neq y$,

- ou $x, y \in U$, para algum $(U, \phi) \in \mathcal{A}$,
- ou existem $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ tais que $U \cap V = \emptyset, x \in U$ e $y \in V$,

então esta topologia é de Hausdorff.

Demonstração. Defina

$$T = \{\mathcal{O} \subseteq X : \phi(\mathcal{O} \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n \text{ é aberto}, \forall (U, \phi) \in \mathcal{A}\}.$$

Vamos mostrar que T é uma topologia que satisfaz a propriedade desejada.

- $\emptyset, X \in T$.

- Sejam $\mathcal{O}_\alpha \in T$, $\alpha \in A$. Para cada $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ temos

$$\phi \left(\left(\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{O}_\alpha \right) \cap U \right) = \phi \left(\bigcup_{\alpha \in A} (\mathcal{O}_\alpha \cap U) \right) = \bigcup_{\alpha \in A} \phi(\mathcal{O}_\alpha \cap U).$$

Como o último conjunto é aberto por hipótese, então $\bigcup \mathcal{O}_\alpha \in T$.

- Sejam $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_m \in T$. Dado $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, então

$$\phi \left(\left(\bigcap_{i=1}^m \mathcal{O}_i \right) \cap U \right) = \phi \left(\bigcap_{i=1}^m (\mathcal{O}_i \cap U) \right) = \bigcap_{i=1}^m \phi(\mathcal{O}_i \cap U).$$

A última igualdade segue mais uma vez do fato de ϕ ser injetiva. Como o último conjunto é aberto por hipótese, então $\bigcap \mathcal{O}_i \in T$.

Isso mostra que T é uma topologia, e é imediato da definição de T que $U \in T$, $\forall (U, \phi) \in \mathcal{A}$. Dado $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, para mostrar que ϕ é um homeomorfismo sobre sua imagem basta notar que:

- ϕ é injetiva;
- $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto;
- se $\mathcal{O} \subseteq U$ é aberto, então $\mathcal{O} \in T$, donde $\phi(\mathcal{O}) = \phi(\mathcal{O} \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto, o que faz de ϕ uma função aberta;
- se $\mathcal{O} \subseteq \phi(U)$ é aberto, então $\phi^{-1}(\mathcal{O}) \subseteq U$ é aberto, pois $\phi(\phi^{-1}(\mathcal{O}) \cap U) = \phi(\phi^{-1}(\mathcal{O})) = \mathcal{O}$, donde ϕ é contínua.

Para a unicidade, suponha que T' é outra topologia tal que U é aberto e ϕ um homeomorfismo sempre que (U, ϕ) é uma carta em X . Se $\mathcal{O} \in T'$, então $\mathcal{O} \cap U \in T'$, $\forall (U, \phi) \in \mathcal{A}$. Logo, $\phi(\mathcal{O} \cap U) \subseteq \mathbb{R}^n$ é aberto, donde $\mathcal{O} \in T$. Reciprocamente, se $\mathcal{O} \in T$, então

$$\mathcal{O} = \bigcup_{(U, \phi) \in \mathcal{A}} \phi^{-1}(\phi(\mathcal{O} \cap U)) \in T'.$$

Com isso, $T' = T$.

Por fim, suponha que \mathcal{A} tenha a propriedade enunciada e vamos mostrar que T é de Hausdorff. Sejam $x, y \in X$ com $x \neq y$. Se existe $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ tal que $x, y \in U$, então $\phi(x) \neq \phi(y)$, donde existem abertos disjuntos $P, Q \subseteq \phi(U)$ tais que $\phi(x) \in P$ e $\phi(y) \in Q$. Logo, $\phi^{-1}(P)$ e $\phi^{-1}(Q)$ são abertos disjuntos em X tais que $x \in \phi^{-1}(P)$ e $y \in \phi^{-1}(Q)$. Se vale a outra possibilidade, então o fato de U e V serem abertos garante o resultado. \square

Quando definirmos a estrutura de variedade para os grupos lineares através da função exponencial, o importante serão os sistemas de coordenadas, não

a topologia herdada de algum espaço-ambiente. Em situações como essa o teorema acima mostra o seu valor.

Podemos tentar definir uma *variedade diferenciável n -dimensional* como um espaço topológico X munido de um atlas n -dimensional \mathcal{A} ; no entanto, esta definição possui um problema: caso haja diferentes atlas compatíveis em X (no sentido que todas as cartas de um são compatíveis com todas as cartas do outro), as variedades determinadas por eles serão distintas. Isso contraria a intuição de que o que importa é o espaço, e não possíveis sistemas de coordenadas para ele.

A maneira clássica de evitar tais situações é completar um dado atlas com as cartas que ele não possui, mas são compatíveis com as suas cartas. Uma vez finalizado este processo, teremos um atlas livre do problema mencionado acima.

Definição 2.1.12. *Sejam X um espaço topológico e \mathcal{A} um atlas em X . Dizemos que \mathcal{A} é:*

- (i) *maximal, se para todo atlas \mathcal{B} em X tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ tem-se $\mathcal{A} = \mathcal{B}$;*
- (ii) *completo, se para cada carta (U, ϕ) em X compatível com todas as cartas de \mathcal{A} tivermos $(U, \phi) \in \mathcal{A}$.*

O fato de um atlas num espaço topológico ser completo é muito conveniente; para ilustrar isso, temos o seguinte resultado:

Lema 2.1.13. *Seja \mathcal{A} um atlas completo num espaço topológico X . Então, dado $p \in X$, para toda vizinhança V de p existe uma carta $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ ao redor de p tal que $U \subseteq V$.*

Demonstração. Considere $(U', \phi') \in \mathcal{A}$ uma carta qualquer ao redor de p . Defina (U, ϕ) por:

$$\begin{aligned} U &= U' \cap V \subseteq V \\ \phi &= \phi'|_U. \end{aligned}$$

É imediato que (U, ϕ) é uma carta em X e que $p \in U$. Além disso, é fácil mostrar que (U, ϕ) é compatível com todas as cartas de \mathcal{A} . O fato de \mathcal{A} ser completo implica $(U, \phi) \in \mathcal{A}$, e disso segue o resultado. \square

O resultado a seguir mostra que os dois conceitos apresentados na última definição são equivalentes, o que se mostra importante na construção das estruturas diferenciáveis.

Lema 2.1.14. *Um atlas \mathcal{A} é maximal sse é completo.*

Demonstração. Suponha que \mathcal{A} é maximal e tome (U, ϕ) uma carta em X compatível com todas as cartas de \mathcal{A} . Então, $\mathcal{A} \cup \{(U, \phi)\}$ é um atlas que contém \mathcal{A} . Pela maximalidade de \mathcal{A} , temos $\mathcal{A} \cup \{(U, \phi)\} = \mathcal{A}$, o que mostra que $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Logo, \mathcal{A} é completo.

Reciprocamente, se \mathcal{A} é completo e \mathcal{B} é um atlas que contém \mathcal{A} , então para cada $(U, \phi) \in \mathcal{B}$ tem-se que (U, ϕ) é compatível com todas as cartas de \mathcal{A} , de modo que $(U, \phi) \in \mathcal{A}$. Logo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, e temos que \mathcal{A} é maximal. \square

Definição 2.1.15. *Uma estrutura diferenciável em um espaço topológico X é um atlas maximal/completo em X .*

Proposição 2.1.16. *Dado um atlas \mathcal{A} num espaço topológico X , existe uma única estrutura diferenciável \mathcal{A}' em X tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$.*

Demonstração. Seja \mathcal{A}' o conjunto das cartas em X compatíveis com todas as cartas de \mathcal{A} . Primeiro, vamos mostrar que \mathcal{A}' é um atlas. É natural que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$, e disso segue que

$$X = \bigcup_{(U, \phi) \in \mathcal{A}'} U.$$

Sejam $(U, \phi), (V, \psi) \in \mathcal{A}'$. Sendo $U \cap V \subseteq X$ aberto e ϕ, ψ homeomorfismos, é imediato que $\phi(U \cap V), \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ são abertos. Para que a transição

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \phi(U \cap V)$$

seja um difeomorfismo é suficiente que seja um difeomorfismo local, já que esta função já é um homeomorfismo. Dado $x_0 \in \psi(U \cap V)$, seja $p \in U \cap V$ tal que $x_0 = \psi(p)$ e tome $(W, \eta) \in \mathcal{A}$ tal que $p \in W$. Então

$$\begin{aligned} \psi(U \cap V \cap W) &\subseteq \psi(U \cap V) \\ \phi(U \cap V \cap W) &\subseteq \phi(U \cap V) \end{aligned}$$

são vizinhanças de x_0 e $\phi \circ \psi^{-1}(x_0)$, respectivamente, e a função

$$\phi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V \cap W) \longrightarrow \phi(U \cap V \cap W)$$

é um difeomorfismo, pois

$$\phi \circ \psi^{-1}(x) = (\psi \circ \eta^{-1}) \circ (\eta \circ \psi^{-1})(x), \quad \forall x \in \psi(U \cap V \cap W).$$

Isso mostra que (U, ϕ) e (V, ψ) são compatíveis, donde \mathcal{A}' é um atlas em X . É imediato que \mathcal{A}' é completo.

Por fim, mostremos a unicidade de \mathcal{A}' . Se \mathcal{B} é outro atlas maximal que contém \mathcal{A} , então para cada carta $(U, \phi) \in \mathcal{B}$ temos que (U, ϕ) é compatível com todas as cartas de \mathcal{A} , donde $(U, \phi) \in \mathcal{A}'$. Logo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}'$. Pela maximalidade de \mathcal{B} , isso significa que $\mathcal{B} = \mathcal{A}'$. \square

Observe que, na parte final da demonstração, mostramos, na verdade, que se \mathcal{B} é um atlas qualquer compatível com \mathcal{A} , então $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}'$. Se \mathcal{B}' é o único atlas maximal que contém \mathcal{B} , é imediato que $\mathcal{B}' = \mathcal{A}'$. Isso significa que atlas compatíveis definem a mesma estrutura diferenciável em X (o que, diga-se de passagem, é perfeitamente razoável).

Definição 2.1.17. *Uma variedade diferenciável n -dimensional (também chamada de n -variedade) é um espaço topológico X munido de uma estrutura diferenciável n -dimensional.*

À luz desses novos conceitos, a definição provisória que demos anteriormente não estava completamente errada: cada atlas em X define uma única estrutura diferenciável, e atlas compatíveis definem a mesma estrutura. Por causa disso, ao construirmos uma variedade não é necessário fornecer um atlas maximal, apenas um usual.

Exemplo 2.1.18. Os espaços \mathbb{RP}^n e \mathbb{S}^n com as suas topologias usuais e com os atlas que fornecemos formam variedades diferenciáveis n -dimensionais. \triangle

Exemplo 2.1.19. Seja E um espaço vetorial real normado de dimensão $n < \infty$. Fixada uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ defina

$$\phi : x^1 e_1 + \dots + x^n e_n \in E \longmapsto (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Sabemos que ϕ é um isomorfismo de espaços normados, o que faz de (E, ϕ) uma carta em E . Segue que $\{(E, \phi)\}$ é um atlas, e que E é uma variedade diferenciável n -dimensional. \triangle

Exemplo 2.1.20. Sejam X uma n -variedade cujo atlas é $\{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$ e $U \subseteq X$ um aberto não-vazio. Podemos definir em U um atlas a partir do de X ; a saber

$$\{(U_\alpha \cap U, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap U}) : \alpha \in A\}.$$

É fácil verificar que este é um atlas n -dimensional em U . Com esta estrutura, U é chamado de *subvariedade aberta* de X . \triangle

Exemplo 2.1.21. Sejam X uma n -variedade e Y uma m -variedade, cujos atlas são

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\} \\ \mathcal{B} &= \{(V_\beta, \psi_\beta) : \beta \in B\}, \end{aligned}$$

respectivamente. Vamos construir uma estrutura de $(n + m)$ -variedade para $X \times Y$ munido da topologia produto. Para cada $\alpha \in A$ e $\beta \in B$ defina

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+m} \\ (p, q) &\longmapsto (\phi_\alpha(p), \psi_\beta(q)). \end{aligned}$$

O domínio $U_\alpha \times V_\beta$ é claramente aberto em $X \times Y$, assim como a imagem $\phi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta)$ o é em \mathbb{R}^{n+m} . A injetividade é imediata da definição.

Vamos verificar a continuidade de $\eta_{\alpha\beta}$. Dado $(p, q) \in U_\alpha \times V_\beta$ qualquer, seja $\mathcal{O} \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha) \times \psi_\beta(V_\beta)$ um aberto tal que $\eta_{\alpha\beta}(p, q) = (\phi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \in \mathcal{O}$. Então, existem abertos $R \subseteq \phi_\alpha(U_\alpha)$ e $S \subseteq \psi_\beta(V_\beta)$ tais que $\phi_\alpha(p) \in R$, $\psi_\beta(q) \in S$ e $R \times S \subseteq \mathcal{O}$. Seja

$$\mathcal{P} = \eta_{\alpha\beta}^{-1}(R \times S) = \phi_\alpha^{-1}(R) \times \psi_\beta^{-1}(S) \subseteq U_\alpha \times V_\beta.$$

Então, \mathcal{P} é aberto, $(p, q) \in \mathcal{P}$ e $\eta_{\alpha\beta}(\mathcal{P}) \subseteq \mathcal{O}$, de modo que $\eta_{\alpha\beta}$ é contínua em (p, q) . Para mostrar que $\eta_{\alpha\beta}$ é aberta, o raciocínio é análogo.

Com isso, $\eta_{\alpha\beta}$ é um homeomorfismo sobre sua imagem, o que faz com que $(U_\alpha \times V_\beta, \eta_{\alpha\beta})$ seja uma carta em $X \times Y$. Seja

$$\mathcal{C} = \{(U_\alpha \times V_\beta, \eta_{\alpha\beta}) : \alpha \in A, \beta \in B\}.$$

Como

$$X \times Y = \bigcup_{\alpha, \beta} (U_\alpha \times V_\beta),$$

para mostrar que \mathcal{C} é atlas para $X \times Y$ é suficiente mostrar a compatibilidade entre as cartas. Dados $\alpha, \alpha' \in A$ e $\beta, \beta' \in B$, então

$$(U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_{\alpha'} \times V_{\beta'}) = (U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \times (V_\beta \cap V_{\beta'}),$$

donde

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta}((U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_{\alpha'} \times V_{\beta'})) &= \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \times \psi_\beta(V_\beta \cap V_{\beta'}) \\ \eta_{\alpha'\beta'}((U_\alpha \times V_\beta) \cap (U_{\alpha'} \times V_{\beta'})) &= \phi_{\alpha'}(U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \times \psi_{\beta'}(V_\beta \cap V_{\beta'}), \end{aligned}$$

que são abertos em \mathbb{R}^{n+m} . Além disso,

$$\begin{aligned} \eta_{\alpha\beta} \circ \eta_{\alpha'\beta'}^{-1}(x, y) &= (\phi_\alpha \circ \phi_{\alpha'}^{-1}(x), \psi_\beta \circ \psi_{\beta'}^{-1}(y)) \\ \eta_{\alpha'\beta'} \circ \eta_{\alpha\beta}^{-1}(x, y) &= (\phi_{\alpha'} \circ \phi_\alpha^{-1}(x), \psi_{\beta'} \circ \psi_\beta^{-1}(y)), \end{aligned}$$

donde $\eta_{\alpha\beta} \circ \eta_{\alpha'\beta'}^{-1}$ e $\eta_{\alpha'\beta'} \circ \eta_{\alpha\beta}^{-1}$ são suaves.

Com esta estrutura diferenciável, $X \times Y$ é chamada a *variedade produto* de X e Y . Observe que esta construção generaliza-se imediatamente para quantidades finitas quaisquer de variedades diferenciáveis. \triangle

2.2 Funções Diferenciáveis e Vetores Tangentes

Vamos discutir nesta seção como a estrutura diferenciável de um conjunto permite generalizar o Cálculo Diferencial a espaços que não o euclidiano. Desta seção em diante, a notação M^m indica que M é uma variedade diferenciável m -dimensional.

Definição 2.2.1. *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis. Uma função $f : M \rightarrow N$ é diferenciável em $p \in M$ se existem cartas (U, ϕ) em M e (V, ψ) em N tais que*

- (i) $p \in U$, $f(p) \in V$ e $f(U) \subseteq V$;
- (ii) $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $\phi(p)$.

Lema 2.2.2. *Se f é diferenciável em p , então f é contínua em p .*

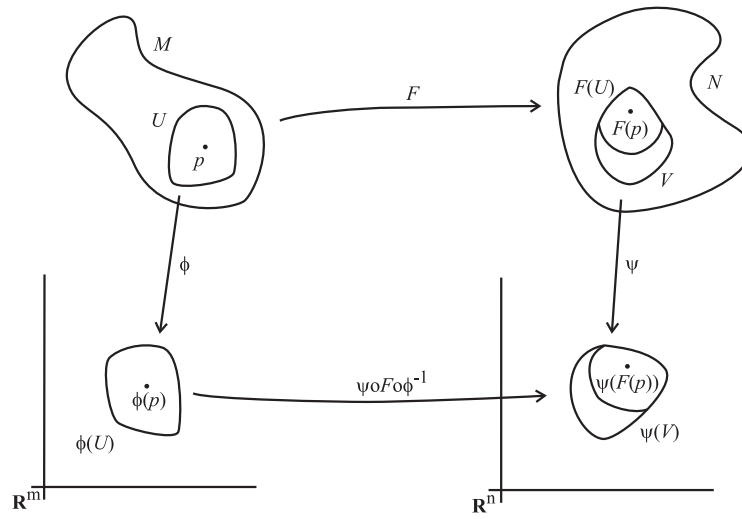


Figura 2.3: Aplicação diferenciável entre variedades.

Demonstração. Sejam (U, ϕ) e (V, ψ) cartas como na definição e $g = \psi \circ f \circ \phi^{-1}$. Sendo g diferenciável em $\phi(p)$, então g é contínua em $\phi(p)$. Segue que $f|_U = \psi^{-1} \circ g \circ \phi$ é contínua em p . Como U é aberto em M , temos que f é contínua em p . \square

Proposição 2.2.3. *Sejam $f : M^m \rightarrow N^n$ uma função e $p \in M$. Suponha que (U, ϕ) e (V, ψ) são cartas em M e N , respectivamente, que fazem f ser diferenciável em p . Se (W, η) e (Z, ξ) são cartas em M e N , respectivamente, tais que $p \in W$, $f(p) \in Z$ e $f(W) \subseteq Z$, então*

$$\xi \circ f \circ \eta^{-1} : \eta(W) \longrightarrow \xi(Z)$$

é diferenciável em $\eta(p)$.

Demonstração. Note que $\forall x \in \eta(W \cap U)$ temos

$$(\xi \circ f \circ \eta^{-1})(x) = ((\xi \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ f \circ \phi^{-1}) \circ (\phi \circ \eta^{-1}))(x).$$

Como $\xi \circ \psi^{-1}$ e $\phi \circ \eta^{-1}$ são suaves, então $\xi \circ f \circ \eta^{-1}$ é diferenciável em $x \in \eta(W \cap U)$ sempre que $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ o for em $\phi \circ \eta^{-1}(x)$, o que de fato ocorre em $x = \eta(p)$. \square

O próximo corolário é apenas um refraseamento da definição de acordo com a proposição, e dispensa uma demonstração.

Corolário 2.2.4. *Uma função $f : M^m \rightarrow N^n$ é diferenciável em $p \in M$ sse para toda carta (U, ϕ) em M e toda carta (V, ψ) em N tais que $p \in U$, $f(p) \in V$ e $f(U) \subseteq V$ tem-se que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ é diferenciável em $\phi(p)$.*

Definição 2.2.5. *Uma função $f : M^m \rightarrow N^n$ é diferenciável se f é diferenciável em todos os pontos de seu domínio. As funções diferenciáveis também são chamadas de suaves.*

Decorre do lema que toda função diferenciável é contínua. Além disso, da proposição e do seu corolário temos o seguinte resultado:

Proposição 2.2.6. *Uma função $f : M^m \rightarrow N^n$ é diferenciável sse para toda carta (U, ϕ) em M e (V, ψ) em N tais que $f(U) \subseteq V$ tem-se que $\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ é diferenciável.*

Definição 2.2.7. *Uma função $f : U \rightarrow N^n$, em que $U \subseteq M^m$ é um aberto, é diferenciável se f é diferenciável considerando-se U como subvariedade aberta de M .*

Exemplo 2.2.8. Seja (U, ϕ) uma carta na variedade M . Então, ϕ é diferenciável. De fato, primeiro observamos que dado $W \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto, só há uma carta relevante em W , que é (W, id_W) . Considerando a própria carta (U, ϕ) , temos que $\text{id}_{\phi(U)} \circ \phi \circ \phi^{-1} = \text{id}_{\phi(U)}$, que é diferenciável. Consequentemente, são diferenciáveis as componentes de ϕ , dadas por $\phi^i = \pi^i \circ \phi$. \triangle

Lema 2.2.9. *Sejam M^m, N^n, Q^q variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N, G : N \rightarrow Q$ funções. Dado $p \in M$, se F é diferenciável em p e G em $F(p)$, então $G \circ F$ é diferenciável em p .*

Demonstração. Sejam (U, ϕ) e (W, ψ) cartas em M e Q , respectivamente, tais que $p \in U$ e $G \circ F(U) \subseteq W$. Precisamos mostrar que a função

$$\eta \circ G \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \eta(W)$$

é diferenciável em $\phi(p)$. Para fazer isso, tome (V, ψ) uma carta em N tal que $F(p) \in V$.

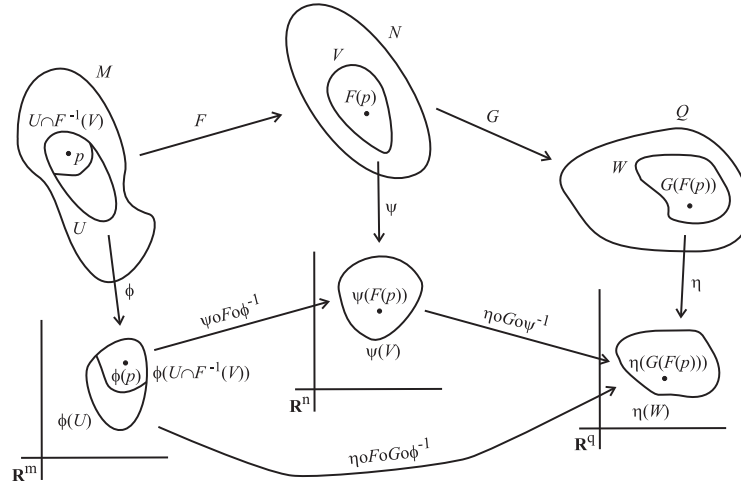


Figura 2.4: Demonstração do lema 2.2.9.

Observe que $U \cap F^{-1}(V)$ é uma vizinhança de p e que para cada $x \in \phi(U \cap F^{-1}(V))$ tem-se $F \circ \phi^{-1}(x) \in V$, de modo que

$$F \circ \phi^{-1}(x) = \psi^{-1} \circ \psi \circ F \circ \phi^{-1}(x), \quad \forall x \in \phi(U \cap F^{-1}(V)).$$

Desta maneira,

$$\eta \circ G \circ F \circ \phi^{-1}(x) = (\eta \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1})(x),$$

sempre que $x \in \phi(U \cap F^{-1}(V))$.

O fato de F ser diferenciável em p traduz-se, pela definição, em $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ ser diferenciável em $\phi(p)$, enquanto o de G ser diferenciável em $F(p)$ traduz-se em $\eta \circ G \circ \psi^{-1}$ ser diferenciável em $\psi(F(p))$. Com isso, decorre da equação acima que $\eta \circ G \circ F \circ \phi^{-1}$ é suave em $\phi(p)$, o que completa a demonstração. \square

O seguinte corolário é consequência imediata do lema:

Corolário 2.2.10. *Se $F : M^m \rightarrow N^n$ e $G : N^n \rightarrow Q^q$ são funções diferenciáveis, então $G \circ F$ também é diferenciável.*

O resultado a seguir é muito útil ao trabalharmos com o produto de variedades diferenciáveis. Deixamos a demonstração como exercício para o leitor: basta usar com cuidado a construção da variedade produto e os resultados exibidos acima.

Teorema 2.2.11. *Sejam M_1, \dots, M_n variedades diferenciáveis e $M = \prod_{i=1}^n M_i$ a variedade produto. São válidas as seguintes afirmações:*

- (a) *Para cada $i = 1, \dots, n$, a projeção π^i de M sobre o seu i -ésimo fator é suave.*
- (b) *Se N é uma variedade qualquer, então uma função $F : N \rightarrow M$ é suave sse $\pi^i \circ F$ é diferenciável, $\forall i = 1, \dots, n$.*
- (c) *Dado $i = 1, \dots, n$ e fixados $p_j \in M_j$, $\forall j \neq i$, a função $I_i : M_i \rightarrow M$ dada por*

$$I_i(p) = (p_1, \dots, p_{i-1}, p, p_{i+1}, \dots, p_n)$$

é diferenciável.

Uma classe importante de funções diferenciáveis é

$$\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é diferenciável}\},$$

pois é utilizada para definir os vetores tangentes.

Proposição 2.2.12. *Munida das operações usuais, $\mathcal{F}(M)$ é uma álgebra comutativa e com unidade sobre \mathbb{R} .*

Demonstração. Para $\mathcal{F}(M)$ ser uma álgebra comutativa, é suficiente que dados $f, g \in \mathcal{F}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tenhamos $f + g, fg, \lambda f \in \mathcal{F}(M)$. Seja (U, ϕ) uma carta em M . Dado $x \in \phi(U)$ temos

$$\begin{aligned} ((f + g) \circ \phi^{-1})(x) &= (f + g)(\phi^{-1}(x)) = f(\phi^{-1}(x)) + g(\phi^{-1}(x)) \\ &= (f \circ \phi^{-1} + g \circ \phi^{-1})(x), \end{aligned}$$

o que implica $(f + g) \circ \phi^{-1} = f \circ \phi^{-1} + g \circ \phi^{-1}$. Disso é fácil ver que $f + g$ é diferenciável. Para fg e λf , o raciocínio é análogo.

A função $\mathbf{1} : M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\mathbf{1}(p) = 1$ é diferenciável e $\mathbf{1}f = f$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$, o que faz dela a unidade de $\mathcal{F}(M)$. \square

Dada uma variedade diferenciável M , precisamos definir o que é um vetor tangente a M num certo $p \in M$. Caso $M \subseteq \mathbb{R}^n$, o trabalho é mais fácil: um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ é tangente a M em p se existe uma curva diferenciável em M que passa por p e cuja velocidade em p é v . Como a nossa formulação do que é uma variedade ignora a possibilidade de ela estar contida em um espaço ambiente, esta definição não nos serve.

Muitas maneiras de generalizar o conceito de vetor tangente exibido acima foram encontradas. Uma delas envolve, bastante intuitivamente, curvas diferenciáveis em M que passam por p , da seguinte maneira: seja C_p o conjunto das curvas suaves $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ tais que $0 \in I$ e $\gamma(0) = p$, e defina a seguinte relação em C_p :

$$\gamma \sim \delta \Leftrightarrow \exists (U, \phi) \text{ carta ao redor de } p \text{ tal que } (\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \delta)'(0).$$

Não é difícil mostrar que $\forall \gamma, \delta \in C$

$$\gamma \sim \delta \Leftrightarrow \forall (U, \phi) \text{ carta ao redor de } p \text{ tem-se que } (\phi \circ \gamma)'(0) = (\phi \circ \delta)'(0),$$

e, com base neste fato, que \sim é uma relação de equivalência em C_p . Neste caso, um vetor tangente é uma classe de equivalência de \sim , e o espaço tangente a M em p é o quociente C/\sim .

Os vetores tangentes definidos da maneira acima muitas vezes são chamados de *geométricos*, pelo seu apelo intuitivo. No entanto, por causa das técnicas que o estudo dos grupos de Lie exigem, não utilizaremos esta formulação, e sim uma mais algébrica.

Considere, por hora, que M é um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m . Fixado $p \in M$, um vetor $v \in \mathbb{R}^m$ qualquer pode ser caracterizado pela ação que ele induz sobre as funções diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Mais precisamente, defina $t_v : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$t_v(f) = df_p(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t} = \frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

Note que t_v é uma função linear e que

$$\begin{aligned} t_v(fg) &= d(fg)_p(v) \\ &= df_p(v)g(p) + f(p)dg_p(v) \\ &= t_v(f)g(p) + f(p)t_v(g). \end{aligned}$$

Caso a verdadeira identidade de v nos fosse desconhecida, poderíamos facilmente descobri-la calculando

$$t_v(\pi^i) = d(\pi^i)_p(v) = \pi^i(v) = v^i.$$

Isso nos motiva a dar a seguinte definição:

Definição 2.2.13. Um vetor tangente à variedade M em $p \in M$ é um funcional linear $v \in \mathcal{F}(M)^*$ tal que

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g), \quad \forall f, g \in \mathcal{F}(M).$$

O conjunto dos vetores tangentes a M em p é chamado espaço tangente a M em p , e denotado por $T_p M$.

Exemplo 2.2.14. Dada uma carta (U, ϕ) em M ao redor de p , defina, para cada $i = 1, \dots, m$, o funcional $\partial_i|_p : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\partial_i|_p(f) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p) := \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)).$$

Como $(f + \lambda g) \circ \phi^{-1} = f \circ \phi^{-1} + \lambda g \circ \phi^{-1}$, então $\partial_i|_p$ é linear. Além do mais,

$$\begin{aligned} \partial_i|_p(fg) &= \frac{\partial((fg) \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) \\ &= \frac{\partial((f \circ \phi^{-1}) \cdot (g \circ \phi^{-1}))}{\partial x^i}(\phi(p)) \\ &= \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) \cdot (g \circ \phi^{-1})(\phi(p)) + \\ &\quad + (f \circ \phi^{-1})(\phi(p)) \cdot \frac{\partial(g \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) \\ &= \partial_i|_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial_i|_p(g). \end{aligned}$$

Isso mostra que $\partial_i|_p \in T_p M$. Também é comum escrever $\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$. \triangle

Exemplo 2.2.15. Dadas as cartas (U, ϕ) e (V, ψ) ao redor de p , considere os vetores tangentes $\{\partial_j|_p\}_{j=1}^m$ e $\{\tilde{\partial}_i|_p\}_{i=1}^m$ determinados por (U, ϕ) e (V, ψ) , respectivamente. Dada $f \in \mathcal{F}(M)$, para cada $j = 1, \dots, m$ temos

$$\begin{aligned} \partial_j|_p(f) &= \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j}(\phi(p)) = \frac{\partial((f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \phi^{-1}))}{\partial x^j}(\phi(p)) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial x^i}(\psi(p)) \cdot \frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j}(\phi(p)) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j}(\phi(p)) \cdot \tilde{\partial}_i|_p(f). \end{aligned}$$

Desta expressão decorre que

$$\partial_j|_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j}(\phi(p)) \cdot \tilde{\partial}_i|_p,$$

o que significa que a matriz jacobiana de $\psi \circ \phi^{-1}$ em $\phi(p)$ contém a informação para a mudança de $\{\partial_j|_p\}_{j=1}^m$ para $\{\tilde{\partial}_i|_p\}_{i=1}^m$. \triangle

Lema 2.2.16. Para cada $p \in M$ tem-se que $T_p M$ é um espaço vetorial real.

Demonstração. Como $T_p M \subseteq \mathcal{F}(M)^*$, basta mostrarmos que $T_p M$ é um subespaço. A soma de funcionais lineares é um funcional linear, assim como o produto por escalares. Dados $v, w \in T_p M$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned} (v + \lambda w)(fg) &= v(fg) + \lambda w(fg) \\ &= v(f)g(p) + f(p)v(g) + \lambda w(f)g(p) + \lambda f(p)w(g) \\ &= (v + \lambda w)(f)g(p) + f(p)(v + \lambda w)(g), \end{aligned}$$

para quaisquer $f, g \in \mathcal{F}(M)$. \square

Mostraremos adiante que, dada uma carta (U, ϕ) ao redor de $p \in M$, o conjunto $\{\partial_j|_p\}_{j=1}^m$ é uma base para $T_p M$. Se tivermos outra carta (V, ψ) em p , que por sua vez determina uma base $\{\tilde{\partial}_i|_p\}$ para $T_p M$, o exemplo 2.2.15 nos mostra como passar de uma base para outra e que a matriz de passagem é a jacobiana da transição de cartas.

Definição 2.2.17. Seja M uma variedade e $p \in M$. Dizemos que $\mathbf{b} \in \mathcal{F}(M)$ é uma função bump¹ em p se existem vizinhanças $U, V \subseteq M$ de p , com $V \subseteq U$, tais que

- (i) $\mathbf{b}(M) \subseteq [0, 1]$;
- (ii) $\text{supp}(\mathbf{b}) \subseteq U$;
- (iii) $\mathbf{b}|_V = \mathbf{1}_V$.

As funções *bump* têm muitas utilidades, entre elas estender funções diferenciáveis, no seguinte sentido:

Definição 2.2.18. Sejam $U \subseteq M$ aberto e $f \in \mathcal{F}(U)$. Dizemos que $\bar{f} \in \mathcal{F}(M)$ estende² f se existe $V \subseteq U$ aberto tal que $f|_V = \bar{f}|_V$.

Seja $U \subseteq M$ uma vizinhança de p e suponha que existe uma função *bump* $\mathbf{b} \in \mathcal{F}(M)$ tal que $\text{supp}(\mathbf{b}) \subseteq U$ (mostraremos isso a seguir). Dada $f \in \mathcal{F}(U)$, defina $\bar{f} : M \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \mathbf{b}(x)f(x) & , x \in U \\ 0 & , x \notin U. \end{cases}$$

Para verificar que \bar{f} é diferenciável, tome $x \in M$.

¹O termo inglês *bump* aqui tem o sentido de “calombo”. Na falta de uma tradução apropriada, deixamos o original.

²Usualmente, uma extensão de uma dada função f é uma função F definida num domínio maior que coincide com f em *todo o domínio* de f . No entanto, para os nossos fins basta que F e f coincidam num subconjunto apropriado do domínio de f . Utilizamos a mesma nomenclatura pela falta de uma mais adequada.

- Se $x \in U$, então existe uma vizinhança W de x em U . Neste caso $\overline{f}|_W = \mathfrak{b}|_W f$ é diferenciável em x .
- Se $x \notin U \supseteq \text{supp}(\mathfrak{b})$, então existe uma vizinhança W de x em $M \setminus \text{supp}(\mathfrak{b})$. Neste caso $\overline{f}|_W = 0$ é diferenciável em x .

Se $V \subseteq U$ é uma vizinhança de p tal que $\mathfrak{b}|_V = \mathbf{1}_V$, então $\overline{f}|_V = f|_V$. Portanto, $f \in \mathcal{F}(U)$ possui extensão. Ela não é única, mas para os nossos propósitos isso não importa³: os vetores tangentes não conseguem distinguir isso.

Proposição 2.2.19. *Seja M uma variedade, $p \in M$ e $U \subseteq M$ uma vizinhança de p . Então, existe $\mathfrak{b} \in \mathcal{F}(M)$ uma função bump tal que $\text{supp}(\mathfrak{b}) \subseteq U$ e $p \in V$, em que $V \subseteq U$ é um aberto tal que $\mathfrak{b}|_V = \mathbf{1}_V$.*

Demonstração. Construiremos a função \mathfrak{b} em etapas.

(1) Seja $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_1(t) = \begin{cases} \exp -1/t & , t > 0 \\ 0 & , t \leq 0. \end{cases}$$

É imediato que f_1 é diferenciável em todo $t \neq 0$. Para verificarmos o mesmo para $t = 0$, primeiro note que $\forall t \neq 0$

$$\begin{aligned} f_1^{(n)}(t) &= 0, \text{ se } t < 0 \\ f_1^{(n)}(t) &= p_n(t) \frac{\exp -1/t}{t^{2n}}, \text{ se } t > 0, \end{aligned}$$

em que $p_n(t)$ é um polinômio. Como

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\exp -1/t}{t^k} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^k}{\exp t} = 0, \forall k \in \mathbb{N},$$

então

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_1^{(n)}(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} p_n(t) \frac{\exp -1/t}{t^{2n+1}} = 0.$$

Disto temos que f_1 é diferenciável em 0, pois

$$\begin{aligned} f_1^{(1)}(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t)}{t} = 0 \\ f_1^{(2)}(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(1)}(t) - f^{(1)}(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(1)}(t)}{t} = 0 \\ &\vdots \\ f_1^{(n)}(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(t)}{t} = 0, \end{aligned}$$

e assim sucessivamente.

³Uma outra maneira de definir vetor tangente envolve o conceito de *gérmen* de função. Seguindo este método, todas as funções que coincidem numa vizinhança do ponto são identificadas por uma relação de equivalência.

(2) Defina $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_2(t) = \frac{f_1(2-t)}{f_1(2-t) + f_1(t-1)}.$$

Note que $f_1(2-t) + f_1(t-1) \geq 0$, pois $f_1 \geq 0$. Caso $f_1(2-t) = 0$, temos $t \geq 2$, donde $t-1 \geq 1$ e $f_1(t-1) = \exp -1/(t-1) > 0$. Isso mostra que f_2 está bem definida. Como $f_1 \geq 0$, então $f_2 \geq 0$, e, além disso, é imediato que $f_2 \leq 1$. Logo $f_2(\mathbb{R}) \subseteq [0, 1]$. Também temos que

$$\begin{aligned} f_2(t) &= 0, \text{ se } t \geq 2 \\ f_2(t) &= 1, \text{ se } t \leq 1. \end{aligned}$$

(3) Seja $r > 0$. Defina $h_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $h_r(t) = f_2(t/r)$. Temos que h_r é diferenciável, $h_r(t) = 1$ se $t \leq r$ e $h_r(t) = 0$ se $t \geq 2r$.

(4) Por fim, escolha (U', ϕ) uma carta em M ao redor de p . Seja $r > 0$ tal que $\overline{B(\phi(p), 2r)} \subseteq \phi(U' \cap U)$, e sejam

$$\begin{aligned} W &= \phi^{-1}(\overline{B(\phi(p), 2r)}) \subseteq U' \cap U \\ V &= \phi^{-1}(B(\phi(p), r)) \subseteq U' \cap U. \end{aligned}$$

Defina $\mathbf{b} : M \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathbf{b}(x) = \begin{cases} h_r(|\phi(x) - \phi(p)|) & , x \in U' \\ 0 & , x \notin U'. \end{cases}$$

Note que $\text{supp}(\mathbf{b}) \subseteq W$. A função \mathbf{b} é diferenciável, pois:

- se $x \notin U' \supseteq \text{supp}(\mathbf{b})$, então existe uma vizinhança de x na qual \mathbf{b} é nula;
- se $x = p$, então na vizinhança V de x temos $\mathbf{b}|_V = \mathbf{1}_V$;
- se $x \in U'$ e $x \neq p$, então existe uma vizinhança $Z \subseteq U'$ de x tal que $p \notin Z$ e

$$\mathbf{b} \circ \phi^{-1}(y) = h_r(|y - \phi(p)|), \quad \forall y \in \phi(Z).$$

Como $\phi(p) \notin \phi(Z)$, segue que $\mathbf{b} \circ \phi^{-1}$ é diferenciável.

Pelas propriedades de h_r , temos também que $\mathbf{b}(M) \subseteq h_r(\mathbb{R}) \subseteq [0, 1]$. \square

O seguinte corolário apenas resume a discussão anterior à proposição.

Corolário 2.2.20. *Se $U \subseteq M$ é aberto e $p \in U$, então para cada $f \in \mathcal{F}(U)$ existe $\bar{f} \in \mathcal{F}(M)$ extensão de f tal que $p \in V$, com $V \subseteq U$ um aberto tal que $f|_V = \bar{f}|_V$. Neste caso, dizemos que \bar{f} estende f em p .*

Lema 2.2.21. *Dados $p \in M$ e $v \in T_p M$, são válidas as seguintes afirmações:*

(a) *se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é constante, então $v(f) = 0$;*

- (b) se $f, g \in \mathcal{F}(M)$ são tais que $f|_U = g|_U$ para alguma vizinhança U de p , então $v(f) = v(g)$.

Demonstração. (a) Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $f = a\mathbf{1}$. Então

$$\begin{aligned} v(f) &= v(a\mathbf{1}) = av(\mathbf{1}) = av(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}) \\ &= a(v(\mathbf{1})\mathbf{1}(p) + \mathbf{1}(p)v(\mathbf{1})) \\ &= 2av(\mathbf{1}) = 2v(f). \end{aligned}$$

Logo $v(f) = 0$.

- (b) Seja $h = f - g \in \mathcal{F}(M)$. Como $f|_U = g|_U$, então $h|_U = 0$. Seja $\mathbf{b} \in \mathcal{F}(M)$ uma função *bump* em p com suporte em U . Então $h\mathbf{b} = \mathbf{0}$, de modo que

$$0 = v(h\mathbf{b}) = v(h)\mathbf{b}(p) + h(p)v(\mathbf{b}) = v(h) = v(f - g).$$

Segue que $v(f) = v(g)$. \square

Proposição 2.2.22. *Sejam $U \subseteq M$ aberto e $p \in U$. Então, os espaços $T_p U$ e $T_p M$ são naturalmente isomorfos.*

Demonstração. Defina $S : T_p U \rightarrow T_p M$ por $S(v)(f) = v(f|_U)$. Mostraremos que S é um isomorfismo, e da sua definição vem que ele é natural.

• **Linear:** Imediato.

• **Injetiva:** Seja $v \in \ker(S)$. Dada $f \in \mathcal{F}(U)$, seja $\bar{f} \in \mathcal{F}(M)$ uma extensão de f em p . Como $f|_V = \bar{f}|_V$ para alguma vizinhança $V \subseteq U$ de p , então $v(f) = v(\bar{f}|_U)$. Logo,

$$v(f) = v(\bar{f}|_U) = S(v)(\bar{f}) = 0.$$

Como isso vale para toda $f \in \mathcal{F}(U)$, então $v = 0$.

• **Sobrejetiva:** Seja $w \in T_p M$. Para cada $f \in \mathcal{F}(U)$, seja $\bar{f} \in \mathcal{F}(M)$ uma extensão de f em p . Defina $v : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ por $v(f) = w(\bar{f})$. Esta função está bem-definida, pois se $\bar{f} \in \mathcal{F}(M)$ é outra extensão de f em p , então \bar{f} e \bar{f} coincidem numa vizinhança de p , donde $w(\bar{f}) = w(\bar{f})$.

Para ver que v é um vetor tangente, primeiro note que $\forall f, g \in \mathcal{F}(U)$ e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ as funções $\bar{f} + \lambda\bar{g}$ e $\bar{f}\bar{g}$ são extensões de $f + \lambda g$ e fg , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} v(f + \lambda g) &= w(\bar{f} + \lambda\bar{g}) = w(\bar{f}) + \lambda w(\bar{g}) = v(f) + \lambda v(g) \\ v(fg) &= w(\bar{f}\bar{g}) = w(\bar{f})\bar{g}(p) + \bar{f}(p)w(\bar{g}) = v(f)g(p) + f(p)w(g), \end{aligned}$$

e isso mostra que $v \in T_p U$.

Por fim, precisamos verificar que $S(v) = w$. Dada $f \in \mathcal{F}(M)$, note que f é uma extensão em p de $f|_U$. Então

$$S(v)(f) = v(f|_U) = w(f),$$

como queríamos. \square

Por causa desta correspondência canônica entre $T_p U$ e $T_p M$, podemos identificar estes espaços. Com isso, um vetor tangente em p pode ser aplicado em qualquer função diferenciável definida numa vizinhança⁴ de p .

Para concluir a seção, vamos mostrar que os vetores tangentes $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ a M em p determinados pela carta (U, ϕ) formam uma base para $T_p M$. O seguinte lema resolve um pequeno problema técnico que na demonstração deste fato.

Lema 2.2.23. *Sejam $p \in M$ e (U, ϕ) uma carta em M ao redor de p . Então, existe uma vizinhança $V \subseteq U$ de p tal que para cada $f \in \mathcal{F}(M)$ há funções $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}(V)$ de modo que*

$$f|_V = f(p) + \sum_{i=1}^m f_i(\phi^i - \phi^i(p))$$

e que

$$f_i(p) = \partial_i|_p(f), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Demonstração. Seja $r > 0$ tal que $W = \overline{B(\phi(p), r)} \subseteq \phi(U)$ e defina $V = \phi^{-1}(W)^\circ$, em que A° denota o interior do conjunto A . É fácil ver que V é uma vizinhança de p em U .

Dada $f \in \mathcal{F}(M)$, seja $g = f \circ \phi^{-1} \in \mathcal{F}(\phi(U))$. Defina, para cada $x \in W$, a função $h_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h_x(t) = g(tx + (1-t)\phi(p)).$$

Então, h_x é diferenciável, $h_x(0) = g(\phi(p))$ e $h_x(1) = g(x)$. Com isso, $\forall x \in W$

$$\begin{aligned} g(x) &= g(\phi(p)) + g(x) - g(\phi(p)) \\ &= g(\phi(p)) + h_x(1) - h_x(0) \\ &= g(\phi(p)) + \int_0^1 h'_x(t) dt \\ &= g(\phi(p)) + \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x^i}(tx + (1-t)\phi(p)) \cdot (x^i - \phi^i(p)) \right] dt \\ &= g(\phi(p)) + \sum_{i=1}^m \left(\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i}(tx + (1-t)\phi(p)) dt \right) (\phi^i(x) - \phi^i(p)) \end{aligned}$$

Defina $g_i : W \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x^i}(tx + (1-t)\phi(p)) dt$$

Precisamos que g_i seja diferenciável. Para tanto, é necessário que possamos diferenciar a expressão acima sob o sinal de integração. Sabe-se que, se a função no integrando for diferenciável e sua derivada for *uniformemente contínua*, então tal operação é lícita. Sendo $\partial g / \partial x^i$ contínua e W compacto,

⁴Muitos autores seguem esta linha para, inclusive, definir os vetores tangentes.

tais hipóteses estão satisfeitas, o que mostra que g_i é, de fato, diferenciável. Desta maneira, podemos escrever

$$g(x) = g(\phi(p)) + \sum_{i=1}^m g_i(x)(\pi^i(x) - \phi^i(p)), \quad \forall x \in W.$$

Para cada $q \in V$ vale

$$f(q) = f \circ \phi^{-1}(\phi(q)) = g(\phi(q)),$$

de modo que

$$\begin{aligned} f(q) &= f(p) + \sum_{i=1}^m g_i(\phi(q))(\pi^i(\phi(q)) - \phi^i(p)) \\ &= f(p) + \sum_{i=1}^m g_i \circ \phi(q)(\phi^i(q) - \phi^i(p)). \end{aligned}$$

Definindo $f_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ por $f_i(q) = g_i \circ \phi(q)$, com $i = 1, \dots, m$, temos que $f_i \in \mathcal{F}(V)$ e que

$$f(q) = f(p) + \sum_{i=1}^m f_i(q)(\phi^i(q) - \phi^i(p)),$$

isto é,

$$f|_V = f(p) + \sum_{i=1}^m f_i(\phi^i - \phi^i(p)).$$

Por fim,

$$\begin{aligned} f_i(p) &= \int_0^1 \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(t\phi(p) + (1-t)\phi(p))dt \\ &= \int_0^1 \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p))dt \\ &= \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) \\ &= \partial_i|_p(f). \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 2.2.24. *Sejam M uma variedade e $p \in M$. Para toda carta (U, ϕ) em M ao redor de p , o conjunto $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ é uma base de T_pM , com*

$$v = \sum_{i=1}^m v(\phi^i)\partial_i|_p, \quad \forall v \in T_pM.$$

Em particular, $\dim(T_pM) = m$.

Demonstração. Lembre que a função $\phi^j = \pi^j \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, $\forall j = 1, \dots, m$ (veja o exemplo 2.2.8). Além disso, $\forall i = 1, \dots, m$ temos

$$\partial_i|_p(\phi^j) = \frac{\partial(\phi^j \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) = \frac{\partial \pi^j}{\partial x^i}(\phi(p)) = \delta_{ij}.$$

Com isso, se $a^1, \dots, a^m \in \mathbb{R}$ são tais que $\sum_{i=1}^m a^i \partial_i|_p = 0$, então

$$0 = \left(\sum_{i=1}^m a^i \partial_i|_p \right) (\phi^j) = \sum_{i=1}^m a^i \partial_i|_p(\phi^j) = \sum_{i=1}^m a^i \delta_{ij} = a^j, \quad \forall j = 1, \dots, m,$$

e daí vem que $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ é L.I.

Para mostrar que $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ gera $T_p M$, tome $v \in T_p M$. Seja $V \subseteq U$ a vizinhança de p descrita no lema anterior. Dada $f \in \mathcal{F}(M)$, sejam $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{F}(V)$ tais que $f_i(p) = \partial_i|_p(f)$ e que

$$f|_V = f(p) + \sum_{i=1}^m f_i(\phi^i - \phi^i(p)).$$

Então,

$$\begin{aligned} v(f) &= v(f|_V) = \sum_{i=1}^m f_i(p) v(\phi^i) = \sum_{i=1}^m v(\phi^i) \partial_i|_p(f) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m v(\phi^i) \partial_i|_p \right) (f). \end{aligned}$$

Como isso vale $\forall f \in \mathcal{F}(M)$, então

$$v = \sum_{i=1}^m v(\phi^i) \partial_i|_p. \quad \square$$

2.3 O Fibrado Tangente e Campos Vetoriais

Um campo vetorial em uma variedade é, informalmente, uma função que a cada ponto associa um vetor tangente à variedade naquele ponto. O domínio de um campo vetorial é, naturalmente, a própria variedade, mas e quanto ao contradomínio? Precisamos de um conjunto cujos elementos sejam os vetores tangentes à variedade, mas de modo que seja possível identificar em que ponto se dá a tangência.

Formalizemos estas idéias: dada uma variedade M^m , o *fibrado tangente* de M é o conjunto

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

Cada elemento de TM é da forma (p, v) , com $v \in T_p M$, mas, por simplicidade, denotaremos-lo freqüentemente por v_p e assumiremos que $v_p \in T_p M$. O conhecimento deste conjunto nos permite definir com precisão o que é um campo vetorial.

Definição 2.3.1. Um campo vetorial em uma variedade M^m é uma função $X : M \rightarrow TM$ tal que $X_p := X(p) \in T_pM$, $\forall p \in M$.

O fibrado tangente vem acompanhado de uma projeção natural $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(v_p) = p$. Para cada $p \in M$, o conjunto $\pi^{-1}(p)$ (que é o espaço T_pM) é chamado de *fibra* sobre p . Disso vem o nome *fibrado*: um conjunto de fibras.

Se X é um campo vetorial, então $X_p \in T_pM$, $\forall p \in M$, e, portanto, $\pi(X_p) = p$. Reciprocamente, se $X : M \rightarrow TM$ é tal que $\pi(X_p) = p$, $\forall p \in M$, então $X_p \in \pi^{-1}(p) = T_pM$, e temos que X é um campo vetorial. Isso mostra o seguinte:

Lema 2.3.2. Uma função $X : M \rightarrow TM$ é um campo vetorial sse $\pi \circ X = \text{id}_M$.

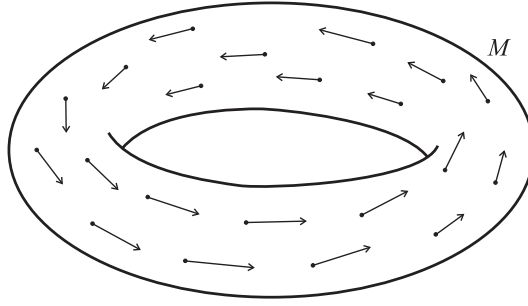


Figura 2.5: Um campo vetorial numa variedade.

Exemplo 2.3.3. Seja (U, ϕ) uma carta em M . Considerando U como subvariedade aberta de M , defina $\partial_i : U \rightarrow TU$ por

$$(\partial_i)_p = \partial_i|_p.$$

Como $\partial_i|_p \in T_pU$, temos que ∂_i é um campo vetorial em U . \triangle

Exemplo 2.3.4. Na mesma linha, dadas as funções $X^1, \dots, X^m : U \rightarrow \mathbb{R}$, defina $X : U \rightarrow TU$ por

$$X_p = \sum_{i=1}^m X^i(p) \partial_i|_p.$$

Segue do exemplo anterior, bem como das nossas discussões sobre vetores tangentes, que X é um campo vetorial em U . \triangle

Seja X um campo vetorial em M^m . Dada uma carta (U, ϕ) , podemos escrever, para cada $p \in U$,

$$X_p = \sum_{i=1}^m X_p(\phi^i) \partial_i|_p = \sum_{i=1}^m X_p^i \partial_i|_p.$$

Isso define, em U , as funções X^1, \dots, X^m , que são chamadas as *coordenadas* de X em U . Estas funções fornecem muitas informações a respeito do campo X na vizinhança U , que veremos adiante.

Falta-nos um critério para determinar quando um campo é contínuo, ou, mais especialmente, diferenciável. Há diversas maneiras de se fazer isso, uma delas utilizando as funções coordenadas; no entanto, essa discussão cria uma ótima oportunidade para estudarmos o fibrado tangente com mais cuidado.

Vamos, ao longo dos próximos parágrafos, construir uma estrutura diferenciável de dimensão $2m$ para TM induzida pela estrutura de M de forma bastante natural.

Para cada carta (U, ϕ) em M , seja $\mathcal{U} = \pi^{-1}(U)$ e defina $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$ por:

$$\Phi(v_p) = \Phi \left(\sum_{i=1}^m v_p^i \partial_i|_p \right) = (\phi(p), (v_p^1, \dots, v_p^m)).$$

A imagem de Φ é $\phi(U) \times \mathbb{R}^m$, que é um aberto de \mathbb{R}^{2m} . Além disso, se $v_p, w_q \in \mathcal{U}$ são tais que $\Phi(v_p) = \Phi(w_q)$, então $\phi(p) = \phi(q)$ e $v_p^i = w_q^i, \forall i$, donde $v_p = w_q$. Isso mostra que Φ é injetiva, o que faz de (\mathcal{U}, Φ) uma carta em TM .

A inversa de Φ pode ser calculada explicitamente: dado $(x, v) \in \phi(U) \times \mathbb{R}^m$, temos que

$$\Phi^{-1}(x, v) = \sum_{i=1}^m v^i \partial_i|_{\phi^{-1}(x)}.$$

Isso nos permite verificar a compatibilidade entre cartas com certa facilidade. Dadas as cartas $(\mathcal{U}, \Phi), (\mathcal{V}, \Psi)$ em TM , induzidas pelas cartas $(U, \phi), (V, \psi)$ de M , é imediato que

$$\begin{aligned} \Phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) &= \phi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m \\ \Psi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) &= \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

que são abertos. Além disso, dado $(x, v) \in \Phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$, lembrando a fórmula de mudança de bases no espaço tangente apresentada na seção anterior, temos que

$$\begin{aligned} \Psi \circ \Phi^{-1}(x, v) &= \Psi \left(\sum_{j=1}^m v^j \partial_j|_{\phi^{-1}(x)} \right) \\ &= \Psi \left(\sum_{j=1}^m v^j \sum_{i=1}^m \frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \Big|_x \tilde{\partial}_i|_{\phi^{-1}(x)} \right) \\ &= \Psi \left(\sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \Big|_x v^j \right) \tilde{\partial}_i|_{\phi^{-1}(x)} \right) \\ &= \left(\psi \circ \phi^{-1}(x), \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial(\psi \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \Big|_x v^j \right)_{i=1}^m \right) \\ &= (\psi \circ \phi^{-1}(x), d(\psi \circ \phi^{-1})_x(v)). \end{aligned}$$

Esta equação claramente define uma função diferenciável, de modo que (\mathcal{U}, Φ) e (\mathcal{V}, Ψ) são compatíveis.

A estrutura diferenciável para TM está intimamente relacionada com a de M , o que podemos ver no seguinte resultado:

Lema 2.3.5. *Se M^m é uma variedade diferenciável cuja topologia é de Hausdorff, então a topologia de TM determinada pelo atlas construído acima também é de Hausdorff.*

Demonstração. A idéia é usar o critério demonstrado no Teorema 2.1.11. Dados $v_p, w_q \in TM$ distintos, há duas possibilidades:

- ou $p \neq q$, donde existem vizinhanças coordenadas disjuntas U de p e V de q , o que faz de \mathcal{U}, \mathcal{V} vizinhanças coordenadas disjuntas de v_p e w_q , respectivamente;
- ou $p = q$, e daí vem que \mathcal{U} é uma vizinhança coordenada de v_p e w_q sempre que U é de p .

De qualquer modo, podemos separar v_p e w_q por abertos disjuntos, o que implica TM ser de Hausdorff. \square

Como consequência de TM possuir uma estrutura diferenciável, possuímos agora uma maneira de decidir quando um campo vetorial é diferenciável ou não. Para este fim, o seguinte resultado dá um caminho interessante.

Teorema 2.3.6. *Um campo vetorial $X : M^m \rightarrow TM$ é diferenciável em uma dada vizinhança coordenada sse as suas funções coordenadas em relação à carta são diferenciáveis.*

Demonstração. Dada uma carta (U, ϕ) em M , considere a carta (\mathcal{U}, Φ) em TM . Para cada $x \in \phi(U)$ temos

$$\begin{aligned} \Phi \circ X \circ \phi^{-1}(x) &= \Phi(X \circ \phi^{-1}(x)) \\ &= \Phi \left(\sum_{i=1}^m X^i \circ \phi^{-1}(x) \partial_i|_{\phi^{-1}(x)} \right) \\ &= (x, (X^1 \circ \phi^{-1}(x), \dots, X^m \circ \phi^{-1}(x))). \end{aligned}$$

Com isso,

$$\Phi \circ X \circ \phi^{-1} = (\text{id}_{\phi(U)}, (X^1 \circ \phi^{-1}, \dots, X^m \circ \phi^{-1}))$$

Desta equação vem que $\Phi \circ X \circ \phi^{-1}$ é diferenciável em $\phi(U)$ sse $X^i \circ \phi^{-1}$ também é, $\forall i$. Isso significa que X é diferenciável em U sse X^i é, $\forall i$, o que mostra o teorema. \square

Corolário 2.3.7. *Dada uma carta (U, ϕ) em M^m e $i \in \{1, \dots, m\}$, o campo vetorial*

$$\partial_i : p \in U \mapsto \partial_i|_p \in T_p U$$

é diferenciável.

Demonstração. Como a j -ésima função coordenada de ∂_i em relação à carta (U, ϕ) é a função constante igual a δ_{ij} , segue do teorema que ∂_i é diferenciável. \square

Corolário 2.3.8. *Dados $p \in M^m$ e $v_p \in T_p M$, existe um campo vetorial diferenciável X em M tal que $X_p = v_p$.*

Demonstração. Sejam (U, ϕ) uma carta em p e $\mathbf{b} \in \mathcal{F}(M)$ uma função *bump* em p com suporte contido em U . Escreva

$$v_p = \sum_{i=1}^m v_p^i \partial_i|_p$$

e defina $X : M \rightarrow TM$ por

$$X_q = \begin{cases} \sum_{i=1}^m v_p^i \mathbf{b}(q) \partial_i|_q & , \text{ se } q \in U \\ 0_q & , \text{ se } q \notin U. \end{cases}$$

É imediato que X é um campo vetorial, e do teorema segue facilmente que X é diferenciável (na segunda seção deste capítulo mostramos que toda função diferenciável $f : V^{ab} \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ admite uma extensão usando um raciocínio semelhante). Além disso, temos da definição de função *bump* que $X_p = v_p$. \square

Corolário 2.3.9. *Se X, Y são campos vetoriais diferenciáveis em M^m , então a função $X + Y : M \rightarrow TM$ dada por $(X + Y)_p = X_p + Y_p$ é um campo vetorial diferenciável.*

Demonstração. A verificação de que $X + Y$ é um campo vetorial é imediata e a deixamos para o leitor mais cético. Para ver que $X + Y$ é diferenciável, tome uma carta (U, ϕ) em M . Segue da definição de $X + Y$ que $\forall p \in U$

$$(X + Y)_p = \sum_{i=1}^m (X_p^i + Y_p^i) \partial_i|_p,$$

o que significa que $(X + Y)^i = X^i + Y^i$, $\forall i$. Sendo assim, o teorema garante a diferenciabilidade de $X + Y$ em U . Como isso vale para toda carta (U, ϕ) , segue o resultado. \square

Corolário 2.3.10. *Se X é um campo vetorial diferenciável em M^m e $f \in \mathcal{F}(M)$, então a função $fX : M \rightarrow TM$ dada por $(fX)_p = f(p)X_p$ é um campo vetorial diferenciável.*

Demonstração. É fácil ver que fX é um campo vetorial, e a sua diferenciabilidade segue de observarmos que, se X^1, \dots, X^m são as funções coordenadas de X em alguma carta de M , então fX^1, \dots, fX^m são as coordenadas de fX nesta mesma carta. \square

Corolário 2.3.11. *Seja $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em M^m . Considerando as seguintes operações em $\mathfrak{X}(M)$:*

$$\begin{aligned} (X, Y) \in \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longmapsto X + Y \in \mathfrak{X}(M) \\ (f, X) \in \mathcal{F}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\longmapsto fX \in \mathfrak{X}(M), \end{aligned}$$

temos que $\mathfrak{X}(M)$ é um $\mathcal{F}(M)$ -módulo à esquerda. Ademais, uma vez que existe um subanel de $\mathcal{F}(M)$ isomorfo a \mathbb{R} (o das funções constantes), temos também que $\mathfrak{X}(M)$ é um espaço vetorial real.

Demonstração. Uma vez estando bem-definidas, verificar que estas operações satisfazem aos axiomas de módulo é mera rotina, e deixamos para o leitor. \square

Dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$, lembramos que $X_p \in T_p M \subseteq \mathcal{F}(M)^*$. Isso significa que X_p é uma função real definida em $\mathcal{F}(M)$. Com isso, dado um campo vetorial $X \in \mathfrak{X}(M)$ e uma função $f \in \mathcal{F}(M)$, podemos definir

$$Xf : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$Xf(p) = X_p(f).$$

Note que, dados $f, g \in \mathcal{F}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $\forall p \in M$

$$\begin{aligned} X(f + \lambda g)(p) &= X_p(f + \lambda g) \\ &= X_p(f) + \lambda X_p(g) \\ &= Xf(p) + \lambda Xg(p) \\ &= (Xf + \lambda Xg)(p). \end{aligned}$$

Logo, $X(f + \lambda g) = Xf + \lambda Xg$. Além disso, $\forall p \in M$

$$\begin{aligned} X(fg)(p) &= X_p(fg) \\ &= X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g) \\ &= Xf(p)g(p) + f(p)Xg(p) \\ &= (Xf \cdot g + f \cdot Xg)(p), \end{aligned}$$

e disso segue que $X(fg) = Xf \cdot g + f \cdot Xg$.

Com isso, caso possamos garantir que $Xf \in \mathcal{F}(M)$ para toda $f \in \mathcal{F}(M)$, o campo X define uma derivação em $\mathcal{F}(M)$. Nesse sentido, temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.12. *Um campo vetorial X em M^m é diferenciável sse $Xf \in \mathcal{F}(M)$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$.*

Demonstração. Primeiro, suponha que $X \in \mathfrak{X}(M)$ e tome $f \in \mathcal{F}(M)$. Para mostrar que $Xf \in \mathcal{F}(M)$, vamos provar que Xf é diferenciável em toda vizinhança coordenada de M .

Seja, então, (U, ϕ) uma carta em M . Para cada $p \in U$, temos que:

$$\begin{aligned} Xf(p) &= X_p(f) \\ &= \sum_{i=1}^m X_p^i \partial_i|_p(f) \\ &= \sum_{i=1}^m X_p^i \cdot \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i}(\phi(p)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^m X^i \cdot \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} \circ \phi \right) \right)(p). \end{aligned}$$

Logo,

$$Xf|_U = \sum_{i=1}^m X^i \cdot \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i} \circ \phi \right).$$

Como X^i é diferenciável $\forall i$ (pois o campo X é diferenciável), assim como f , então $Xf|_U$ é diferenciável.

Agora, suponha que $Xf \in \mathcal{F}(M)$, $\forall f \in \mathcal{F}(M)$. Para verificar que $X \in \mathfrak{X}(M)$, mostraremos que X é diferenciável em toda vizinhança coordenada de M .

Dada uma carta (U, ϕ) , as coordenadas de X em relação a ϕ em $p \in U$ são:

$$X_p^i = X_p(\phi^i) = X\phi^i(p),$$

de modo que

$$X^i = X\phi^i.$$

Portanto, para mostrar que X é diferenciável em U , é suficiente que $X\phi^i$ o seja, $\forall i$. No entanto, as funções $X\phi^i$ estão definidas apenas em U , e por causa disso não podemos aplicar diretamente a hipótese que temos sobre X e concluir a demonstração.

Resolvemos este problema da seguinte maneira: dado $p \in U$, para cada $i = 1, \dots, m$ seja $\bar{\phi}^i \in \mathcal{F}(M)$ extensão de ϕ^i em p que coincide com ϕ^i numa vizinhança $V_i \subseteq U$ de p . Se V é a interseção destas vizinhanças, temos que $V \subseteq U$ é uma vizinhança de p e que $\bar{\phi}^i|_V = \phi^i|_V$, $\forall i$.

Com isso, $\forall q \in V$

$$X_q^i = X_q(\phi^i) = X_q(\bar{\phi}^i) = X\bar{\phi}^i(q),$$

o que equivale a

$$X^i|_V = X\bar{\phi}^i|_V.$$

Pela hipótese sobre X , desta equação decorre que $X^i|_V$ é diferenciável, $\forall i$. Como este argumento vale $\forall p \in U$, então X^i é diferenciável em U , o que completa a demonstração. \square

Exemplo 2.3.13. Considere, em \mathbb{R}^3 , o campo vetorial X dado por

$$X_{(x,y,z)} = \sin(xy) \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} - \exp y + z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Dada $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$, vamos calcular Xf . Lembrando a definição, temos $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} Xf(x, y, z) &= X_{(x,y,z)}(f) \\ &= \sin(xy) \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) + z \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) - \exp y + z \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z). \end{aligned}$$

Observe que esta função é, de fato, diferenciável. \triangle

Como consequência do teorema, temos que, para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, a função $\mathcal{X} : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ dada por $\mathcal{X}(f) = Xf$ está bem-definida. Além disso, da discussão anterior vem que $\mathcal{X} \in \mathfrak{der}(\mathcal{F}(M))$.

Reciprocamente, dada uma derivação em $\mathcal{F}(M)$, podemos nos perguntar se ela é determinada a partir de um campo vetorial suave.

Teorema 2.3.14. *A aplicação que associa a cada campo vetorial suave uma derivação em $\mathcal{F}(M)$ é um isomorfismo linear natural entre $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{der}(\mathcal{F}(M))$.*

Demonstração. Defina $T : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{der}(\mathcal{F}(M))$ por

$$T(X)(f) = Xf.$$

Esta função, mostra-se facilmente, é linear. Vamos concentrar nossa atenção em mostrar que T é um isomorfismo, e, feito isso, segue da definição que T é natural.

Para a injetividade, seja $X \in \ker(T)$. Dados $p \in M$ e $f \in \mathcal{F}(M)$, temos que

$$X_p(f) = Xf(p) = T(X)(f)(p) = 0,$$

pois $T(X) = 0$. Como isso vale para cada $f \in \mathcal{F}(M)$ e para cada $p \in M$, temos que $X = 0$.

Para a sobrejetividade, seja \mathcal{X} uma derivação em $\mathcal{F}(M)$. Para que $\mathcal{X} \in \text{Im}(T)$, é necessário existir $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $\mathcal{X} = T(X)$, isto é, tal que $\forall f \in \mathcal{F}(M)$ e $\forall p \in M$

$$\mathcal{X}(f)(p) = T(X)(f)(p) = Xf(p) = X_p(f).$$

Deste modo, define $X : M \rightarrow TM$ por

$$X_p(f) = \mathcal{X}(f)(p), \quad \forall p \in M, \quad \forall f \in \mathcal{F}(M).$$

Esta função está bem-definida, pois dado $p \in M$ temos

$$\begin{aligned} X_p(f + \lambda g) &= \mathcal{X}(f + \lambda g)(p) \\ &= (\mathcal{X}(f) + \lambda \mathcal{X}(g))(p) \\ &= \mathcal{X}(f)(p) + \lambda \mathcal{X}(g)(p) \\ &= X_p(f) + \lambda X_p(g) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_p(fg) &= \mathcal{X}(fg)(p) \\ &= (\mathcal{X}(f) \cdot g + f \cdot \mathcal{X}(g))(p) \\ &= \mathcal{X}(f)(p) \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathcal{X}(g)(p) \\ &= X_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot X_p(g), \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $f, g \in \mathcal{F}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Isso mostra que $X_p \in T_pM$, $\forall p \in M$, ou seja, que X é um campo vetorial.

O último teorema nos fornece a diferenciabilidade de X , da seguinte maneira: dada $f \in \mathcal{F}(M)$, temos $\forall p \in M$ que

$$Xf(p) = X_p(f) = \mathcal{X}(f)(p),$$

o que implica $Xf = \mathcal{X}(f)$. Como $\mathcal{X} \in \mathfrak{der}(\mathcal{F}(M))$, então $\mathcal{X}(f) \in \mathcal{F}(M)$, e da equação anterior decorre que $Xf \in \mathcal{F}(M)$. Como isso vale para cada $f \in \mathcal{F}(M)$, concluímos que $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Por fim, segue de $Xf = \mathcal{X}(f)$ que $T(X) = \mathcal{X}$. \square

O espaço $\mathfrak{der}(\mathcal{F}(M))$ possui uma estrutura natural de álgebra de Lie (veja o Apêndice B), com colchete de Lie dado por

$$[\mathcal{X}, \mathcal{Y}] = \mathcal{X} \circ \mathcal{Y} - \mathcal{Y} \circ \mathcal{X}, \quad \forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathfrak{der}(\mathcal{F}(M)).$$

O isomorfismo apresentado no teorema anterior nos permite transportar este colchete para $\mathfrak{X}(M)$, da seguinte maneira: dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, defina

$$[X, Y] = T^{-1}[T(X), T(Y)].$$

Observe que desta equação vem que $\forall f \in \mathcal{F}(M)$

$$\begin{aligned} [X, Y]f &= T([X, Y])(f) \\ &= [T(X), T(Y)](f) \\ &= (T(X) \circ T(Y))(f) - (T(Y) \circ T(X))(f) \\ &= X(Yf) - Y(Xf). \end{aligned}$$

Por causa disso, costuma-se escrever

$$[X, Y] = XY - YX, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

A maneira como foi definido garante que $[\cdot, \cdot]$ é um colchete de Lie em $\mathfrak{X}(M)$, e, com isso, $\mathfrak{X}(M)$ recebe uma estrutura adicional de álgebra de Lie. Além disso, é fácil ver que o isomorfismo linear T apresentado no teorema é um isomorfismo de álgebras de Lie. Como este isomorfismo é natural, muitas vezes não é feita distinção entre os campos vetoriais e as derivações.

O seguinte resultado fornece algumas propriedades operacionais importantes do colchete de Lie de campos vetoriais sobre uma variedade diferenciável.

Lema 2.3.15. *Seja M^m uma variedade diferenciável. Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades:*

- (a) $[X + \lambda Y, Z] = [X, Z] + \lambda[Y, Z]$
 $[X, Y + \lambda Z] = [X, Y] + \lambda[X, Z];$
- (b) $[X, Y] = -[Y, X];$
- (c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0;$

$$(d) [fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Demonstração. Os itens (a), (b) e (c) apenas formalizam o fato de $[,]$ ser um colchete de Lie em $\mathfrak{X}(M)$, e não os demonstraremos.

Para (d), primeiro note que $\forall X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\forall f, g \in \mathcal{F}(M)$

$$(fX)g = f(Xg),$$

pois dado $p \in M$

$$\begin{aligned} (fX)g(p) &= (fX)_p(g) \\ &= f(p)X_p(g) \\ &= f(p)(Xg)(p) \\ &= f(Xg)(p). \end{aligned}$$

Logo, $\forall h \in \mathcal{F}(M)$

$$\begin{aligned} [fX, gY]h &= (fX)(gY)h - (gY)(fX)h \\ &= (fX)(g(Yh)) - (gY)(f(Xh)) \end{aligned}$$

Usando a regra de Leibniz na expressão acima, temos

$$\begin{aligned} [fX, gY]h &= ((fX)g)(Yh) + g((fX)(Yh)) - ((gY)f)(Xh) - f((gY)(Xh)) \\ &= (f(Xg))(Yh) + gf(X(Yh)) - (g(Yf))(Xh) - fg(Y(Xh)) \\ &= fg(XY - YX)h + (f(Xg)Y)h - (g(Yf)X)h \\ &= (fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X)h, \end{aligned}$$

de modo que

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X. \quad \square$$

O colchete de Lie de campos vetoriais possui, além da construção algébrica, uma forte motivação geométrica. No entanto, a compreensão deste aspecto exige um estudo detalhado de EDO em variedades, o que desvia-se muito da nossa proposta. O leitor mais curioso pode consultar (LEE, 2003) para mais informações.

O próximo resultado, que finaliza a seção, fornece as funções coordenadas do colchete de Lie de dois campos vetoriais numa determinada vizinhança coordenada.

Proposição 2.3.16. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e (U, ϕ) uma carta em M^m . Se*

$$\begin{aligned} X|_U &= \sum_{i=1}^m X^i \partial_i \\ Y|_U &= \sum_{i=1}^m Y^i \partial_i, \end{aligned}$$

então

$$[X, Y]|_U = \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m X^i (\partial_i Y^j) - Y^i (\partial_i X^j) \right) \partial_j.$$

Demonstração. Pela bilinearidade de $[\cdot, \cdot]$, temos

$$\begin{aligned} [X, Y]|_U &= \left[\sum_{i=1}^m X^i \partial_i, \sum_{j=1}^m Y^j \partial_j \right] \\ &= \sum_{i,j=1}^m [X^i \partial_i, Y^j \partial_j]. \end{aligned}$$

Por outro lado, do lema anterior decorre que

$$[X^i \partial_i, Y^j \partial_j] = X^i Y^j [\partial_i, \partial_j] + X^i (\partial_i Y^j) \partial_j - Y^j (\partial_j X^i) \partial_i.$$

Para determinar $[\partial_i, \partial_j]$, tome $f \in \mathcal{F}(M)$:

$$[\partial_i, \partial_j]f = \partial_i(\partial_j f) - \partial_j(\partial_i f).$$

Como $\forall p \in U$

$$\begin{aligned} \partial_j f(p) &= \partial_j|_p(f) \\ &= \left. \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j} \right|_{\phi(p)} \\ &= \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j} \circ \phi \right)(p), \end{aligned}$$

temos

$$\partial_j f = \frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j} \circ \phi,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \partial_i(\partial_j f) &= \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ \left(\frac{\partial(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j} \circ \phi \right) \circ \phi^{-1} \right\} \circ \phi \\ &= \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j} \circ \phi. \end{aligned}$$

Logo,

$$[\partial_i, \partial_j]f = \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^i \partial x^j} \circ \phi - \frac{\partial^2(f \circ \phi^{-1})}{\partial x^j \partial x^i} \circ \phi = 0,$$

o que mostra que $[\partial_i, \partial_j] = 0$.

Com isso,

$$[X^i \partial_i, Y^j \partial_j] = X^i (\partial_i Y^j) \partial_j - Y^j (\partial_j X^i) \partial_i$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
 [X, Y]|_U &= \sum_{i,j=1}^m X^i(\partial_i Y^j) \partial_j - Y^j(\partial_j X^i) \partial_i \\
 &= \sum_{i,j=1}^m X^i(\partial_i Y^j) \partial_j - \sum_{i,j=1}^m Y^j(\partial_j X^i) \partial_i \\
 &= \sum_{i,j=1}^m X^i(\partial_i Y^j) \partial_j - \sum_{i,j=1}^m Y^i(\partial_i X^j) \partial_j \\
 &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^m X^i(\partial_i Y^j) - Y^i(\partial_i X^j) \right) \partial_j,
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. \square

Exemplo 2.3.17. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ dados por

$$\begin{aligned}
 X_{(x,y)} &= \log(x^2 + 1) \frac{\partial}{\partial x} + y^3 \frac{\partial}{\partial y} \\
 Y_{(x,y)} &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

Vamos calcular o colchete de Lie entre X e Y . O teorema nos dá uma maneira mais prática de fazer isso do que usar a definição. As componentes de $[X, Y]$ são

$$\begin{aligned}
 [X, Y]^1 &= -\log(x^2 + 1) \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial(\log(x^2 + 1))}{\partial x} - y^3 \frac{\partial y}{\partial y} - x \frac{\partial(\log(x^2 + 1))}{\partial y} \\
 &= \frac{2xy}{x^2 + 1} - y^3 \\
 [X, Y]^2 &= \log(x^2 + 1) \frac{\partial x}{\partial x} + y \frac{\partial y^3}{\partial x} + y^3 \frac{\partial x}{\partial y} - x \frac{\partial y^3}{\partial y} \\
 &= \log(x^2 + 1) - 3xy^2,
 \end{aligned}$$

de modo que

$$[X, Y] = \left(\frac{2xy}{x^2 + 1} - y^3 \right) \frac{\partial}{\partial x} + (\log(x^2 + 1) - 3xy^2) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Perceba que calcular explicitamente o colchete de Lie entre dois campos vetoriais dados é, em geral, uma tarefa trabalhosa. \triangle

2.4 A Diferencial de uma Aplicação

Na segunda seção deste capítulo, discutimos a noção de diferenciabilidade de funções entre variedades diferenciáveis; no entanto, nem sequer mencionamos a diferencial de uma tal aplicação.

Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre variedades. Dado $p \in M$, procuramos uma aplicação que associa a cada vetor $v \in T_p M$ um vetor $\tilde{v} \in T_{F(p)} N$ por meio de F . Como $T_p M$ e $T_{F(p)} N$ têm estrutura de espaço vetorial, queremos que esta aplicação seja linear.

Considere, por enquanto, que M e N são subvariedades abertas de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n , respectivamente. Neste caso, para cada $p \in M$, existe associada a F uma aplicação linear $dF_p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, a diferencial de F em p . Aqui, podemos considerar $\mathbb{R}^m = T_p M$ e $\mathbb{R}^n = T_{F(p)} N$.

Dado $v \in \mathbb{R}^m$, o vetor $dF_p(v) \in \mathbb{R}^n$ é caracterizado por

$$dF_p(v) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(p + tv) - F(p)}{t},$$

ou, como vimos na seção 2.2, por sua ação sobre as funções diferenciáveis $f : N \rightarrow \mathbb{R}$, que é dada por

$$dF_p(v)(f) = df_{F(p)}(dF_p(v)).$$

Como esta última caracterização de vetor tangente é a que nos interessa, vamos analisá-la com mais cuidado. Observe que, por definição,

$$\begin{aligned} dF_p(v)(f) &= (df_{F(p)} \circ dF_p)(v) \\ &= d(f \circ F)_p(v) \\ &= v(f \circ F). \end{aligned}$$

Com isso, no caso em que M^m e N^n são variedades arbitrárias, para cada $p \in M$ e $v \in T_p M$, a discussão acima nos motiva a *definir* o vetor $dF_p(v)$ pela equação

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F), \quad \forall f \in \mathcal{F}(M),$$

o que faz sentido, pois, sendo $F : M^m \rightarrow N^n$ é diferenciável e $f \in \mathcal{F}(N)$, então $f \circ F \in \mathcal{F}(M)$. Logo, para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p M$ podemos definir a função

$$v_F : \mathcal{F}(N) \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$v_F(f) = v(f \circ F).$$

Afirmamos que $v_F \in T_{F(p)} N$, o que de fato ocorre, pois se $f, g \in \mathcal{F}(N)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} v_F(f + \lambda g) &= v((f + \lambda g) \circ F) \\ &= v(f \circ F + \lambda g \circ F) \\ &= v(f \circ F) + \lambda v(g \circ F) \\ &= v_F(f) + \lambda v_F(g) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} v_F(fg) &= v((fg) \circ F) \\ &= v((f \circ F) \circ (g \circ F)) \\ &= v(f \circ F) \cdot g(F(p)) + f(F(p)) \cdot v(g \circ F) \\ &= v_F(f) \cdot g(F(p)) + f(F(p)) \cdot v_F(g). \end{aligned}$$

Motivados pelas nossas observações anteriores ao último lema, vamos denotar o vetor tangente v_F por $dF_p(v)$. Isso define uma função $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$, cujas principais propriedades são dadas pelo seguinte resultado:

Teorema 2.4.1. *Sejam M^m, N^n, Q^q variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$, $G : N \rightarrow Q$ funções diferenciáveis. São válidas as seguintes afirmações:*

(a) *A função $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ é linear, $\forall p \in M$;*

(b) *Dado $p \in M$, temos*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p;$$

(c) *Para cada $p \in M$, tem-se que*

$$d(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_pM}.$$

Demonstração. (a) Sejam $v, w \in T_pM$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Dada $f \in \mathcal{F}(N)$, temos

$$\begin{aligned} dF_p(v + \lambda w)(f) &= (v + \lambda w)(f \circ F) \\ &= v(f \circ F) + \lambda w(f \circ F) \\ &= dF_p(v)(f) + \lambda dF_p(w)(f), \end{aligned}$$

e desta equação segue facilmente que

$$dF_p(v + \lambda w) = dF_p(v) + \lambda dF_p(w).$$

(b) Primeiro, observe que $d(G \circ F)_p$ e $dG_{F(p)} \circ dF_p$ dão funções de mesmo domínio e contradomínio. Além disso, dado $v \in T_pM$, temos $\forall f \in \mathcal{F}(Q)$

$$\begin{aligned} d(G \circ F)_p(v)(f) &= v(f \circ G \circ F) \\ &= dF_p(v)(f \circ G) \\ &= dG_{F(p)} \circ dF_p(v)(f), \end{aligned}$$

e disso segue a afirmação.

(c) Dados $v \in T_pM$ e $f \in \mathcal{F}(M)$, temos

$$d(\text{id}_M)_p(v)(f) = v(f \circ \text{id}_M) = v(f),$$

de modo que $d(\text{id}_M)_p(v) = v$, $\forall v \in T_pM$. Logo, $d(\text{id}_M)_p = \text{id}_{T_pM}$. □

Verificadas estas propriedades, podemos, agora, fazer uma definição formal:

Definição 2.4.2. *A diferencial de uma função diferenciável $F : M^m \rightarrow N^n$ em $p \in M$ é a função linear $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ dada por*

$$dF_p(v)(f) = v(f \circ F), \quad \forall v \in T_pM, \quad \forall f \in \mathcal{F}(N).$$

Como a diferencial de uma aplicação num ponto é uma transformação linear entre espaços reais de dimensão finita, podemos calcular a sua matriz num par de bases prefixadas. O caso mais interessante é quando estas bases são determinadas por cartas locais.

Proposição 2.4.3. *Sejam $F : M^m \rightarrow N^n$ uma função diferenciável e $p \in M$. Dadas as cartas (U, ϕ) em M ao redor de p e (V, ψ) em N ao redor de $F(p)$, considere as bases $\{\partial_j|_p\}_{j=1}^m$ e $\{\tilde{\partial}_i|_{F(p)}\}_{i=1}^n$ de T_pM e $T_{F(p)}N$ determinadas, respectivamente, por (U, ϕ) e (V, ψ) . Então, a matriz de dF_p com relação a estas bases é a matriz jacobiana de $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ em $\phi(p)$.*

Observação: Lembramos que a matriz jacobiana de $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$ em um ponto x de seu domínio é a matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ dada por

$$A_j^i = \left. \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \right|_x,$$

com $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$.

Demonstração. Sabemos da Álgebra Linear que para determinar a matriz de dF_p nas bases indicadas é suficiente escrever $\forall j$ o vetor $dF_p(\partial_j|_p)$ na base $\{\tilde{\partial}_i|_{F(p)}\}$, e os coeficientes destas combinações lineares fornecem a matriz desejada.

Com esse objetivo, vamos analisar o vetor $dF_p(\partial_j|_p)$ com mais atenção. Dada uma função $f \in \mathcal{F}(N)$, segue da definição de $\partial_j|_p$, fornecida na seção 2.2, que

$$\begin{aligned} dF_p(\partial_j|_p)(f) &= \partial_j|_p(f \circ F) \\ &= \left. \frac{\partial(f \circ F \circ \phi^{-1})}{\partial x^j} \right|_{\phi(p)}. \end{aligned}$$

Como $U \cap F^{-1}(V)$ é uma vizinhança de p , o que implica $\phi(U \cap F^{-1}(V))$ ser uma vizinhança de $\phi(p)$, podemos escrever

$$f \circ F \circ \phi^{-1}(x) = (f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1})(x),$$

para cada $x \in \phi(U \cap F^{-1}(V))$. Então,

$$dF_p(\partial_j|_p)(f) = \left. \frac{\partial((f \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \phi^{-1}))}{\partial x^j} \right|_{\phi(p)}.$$

Usando a Regra da Cadeia no membro direito desta equação, obtemos

$$\begin{aligned} dF_p(\partial_j|_p)(f) &= \sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial(f \circ \psi^{-1})}{\partial x^i} \right|_{\psi(F(p))} \cdot \left. \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \right|_{\phi(p)} \\ &= \sum_{i=1}^n \tilde{\partial}_i|_{F(p)}(f) \cdot \left. \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \right|_{\phi(p)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \left. \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \right|_{\phi(p)} \cdot \tilde{\partial}_i|_{F(p)} \right)(f). \end{aligned}$$

Como esta equação vale $\forall f \in \mathcal{F}(N)$, concluímos que

$$dF_p(\partial_j|_p) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \Big|_{\phi(p)} \cdot \tilde{\partial}_i|_{F(p)},$$

o que fornece o resultado desejado. \square

Exemplo 2.4.4. Considere a função $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(t) = (\cos t, \sin t)$. É imediato que F é diferenciável. Vamos calcular a diferencial de F em $t_0 \in \mathbb{R}$. Então $\forall v \in T_{t_0}\mathbb{R}$, escreva $v = \lambda \frac{d}{dt}|_{t_0}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Como F coincide com a sua representação \tilde{F} , temos

$$\begin{aligned} dF_{t_0}(v) &= dF_{t_0} \left(\lambda \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \\ &= \lambda \left(\frac{dF^1}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F(t_0)} + \frac{dF^2}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{F(t_0)} \right) \\ &= -\lambda \sin t_0 \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F(t_0)} + \lambda \cos t_0 \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{F(t_0)}. \end{aligned}$$

Observe que a matriz jacobiana de F em t_0 é dada por $(-\sin t_0 \quad \cos t_0)$. \triangle

Se $U \subseteq \mathbb{R}^m$ é aberto e $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função diferenciável, a diferencial clássica de F e a que definimos acima são o mesmo objeto? Examinando as definições de ambas, concluímos que não; entretanto, a proposição acima, ilustrada pelo exemplo, mostra que isso não importa: as duas aplicações possuem a mesma matriz, e os resultados que tínhamos antes, como o Teorema da Função Inversa, continuam valendo.

Aproveitando a oportunidade, vamos mostrar como o Teorema da Função Inversa se estende para o contexto mais geral das variedades. Uma certa reflexão a respeito do assunto mostra que isso realmente não é uma surpresa, pois as variedades diferenciáveis são construídas de modo a se comportarem, localmente, de forma semelhante aos espaços \mathbb{R}^n .

Definição 2.4.5. Sejam M^m, N^n variedades e $F : M \rightarrow N$ uma função diferenciável. Dizemos que F é um:

- (i) difeomorfismo, se F é bijetiva e F^{-1} é diferenciável;
- (ii) difeomorfismo local em $p \in M$, se existem vizinhanças $U \subseteq M$ de p e $V \subseteq N$ de $F(p)$ tais que $F : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo;
- (iii) difeomorfismo local, se para cada $p \in M$ tem-se que F é um difeomorfismo local em p .

Usando esta terminologia, o Teorema da Função Inversa pode ser formulado da seguinte maneira:

Teorema 2.4.6. *Uma função diferenciável $F : M^m \rightarrow N^n$ é um difeomorfismo local em $p \in M$ sse $m = n$ e dF_p é invertível.*

Observação: A condição $m = n$, isto é, $\dim(M) = \dim(N)$, foi posta apenas para chamar atenção ao fato de que se existe um difeomorfismo local entre duas variedades diferenciáveis, elas obrigatoriamente possuem a mesma dimensão. Como a dimensão de uma variedade é igual à dimensão de qualquer espaço tangente a ela, esta condição é consequência de dF_p ser um isomorfismo, e qualquer menção a ela será omitida na demonstração do teorema, assim como nas dos resultados que o seguem.

Demonstração. Primeiro, suponha que F é um difeomorfismo local em p e sejam U, V vizinhanças de p e $F(p)$, respectivamente, tais que $F : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo. Disso segue que

$$\begin{aligned} dF_p \circ d(F^{-1})_{F(p)} &= dF_{F^{-1}(F(p))} \circ d(F^{-1})_{F(p)} \\ &= d(F \circ F^{-1})_{F(p)} \\ &= d(\text{id}_V)_{F(p)} \\ &= \text{id}_{T_{F(p)}N} \end{aligned}$$

e, analogamente, que

$$d(F^{-1})_{F(p)} \circ dF_p = \text{id}_{T_pM}.$$

Portanto, dF_p é invertível e $(dF_p)^{-1} = d(F^{-1})_{F(p)}$.

Agora, suponha que dF_p é invertível. Sejam (U', ϕ) e (V', ψ) cartas em M e N ao redor de p e $F(p)$, respectivamente, tais que $F(U') \subseteq V'$. Estas cartas podem ser obtidas da seguinte maneira: dada (V', ψ) uma carta em N ao redor de $F(p)$, a continuidade de F garante que $F^{-1}(V')$ é uma vizinhança de p ; logo, existe uma carta (U', ϕ) de M ao redor de p tal que $U' \subseteq F^{-1}(V')$, isto é, tal que $F(U') \subseteq V'$.

Feito isso, considere a função

$$\tilde{F} : \phi(U') \subseteq \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V') \subset \mathbb{R}^n$$

dada por

$$\tilde{F}(x) = \psi \circ F \circ \phi^{-1}(x), \quad \forall x \in \phi(U').$$

Observe que \tilde{F} é diferenciável. Além disso, a matriz jacobiana de \tilde{F} em $\phi(p) \in \phi(U')$ é dada por

$$J_j^i = \left. \frac{\partial \tilde{F}^i}{\partial x^j} \right|_{\phi(p)} = \left. \frac{\partial (\psi \circ F \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \right|_{\phi(p)}.$$

A hipótese de dF_p ser invertível, junto com a proposição anterior, mostra que J é invertível, e o Teorema da Função Inversa na forma clássica (veja o apêndice) garante a existência de abertos $U'' \subseteq \phi(U')$ e $V'' \subseteq \psi(V')$ tais que

- $\phi(p) \in U''$;

- $\tilde{F}(\phi(p)) = \psi(F(p)) \in V''$;
- $\tilde{F} : U'' \rightarrow V''$ é um difeomorfismo.

Defina $U = \phi^{-1}(U'')$ e $V = \psi^{-1}(V'')$; das observações acima, temos que U é vizinhança de p , enquanto V é vizinhança de $F(p)$. Ademais, definindo $G : V \rightarrow U$ por $G = \phi^{-1} \circ \tilde{F}^{-1} \circ \psi$, vemos que G é diferenciável e, uma vez que $F|_U = \psi^{-1} \circ \tilde{F} \circ \phi$, também que

$$\begin{aligned} F \circ G &= (\psi^{-1} \circ \tilde{F} \circ \phi) \circ (\phi^{-1} \circ \tilde{F}^{-1} \circ \psi) \\ &= \text{id}_V \\ G \circ F &= (\phi^{-1} \circ \tilde{F}^{-1} \circ \psi) \circ (\psi^{-1} \circ \tilde{F} \circ \phi) \\ &= \text{id}_U. \end{aligned}$$

Portanto, $F : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo. \square

Corolário 2.4.7. *Uma função diferenciável $F : M^m \rightarrow N^n$ é um difeomorfismo local sse $m = n$ e dF_p é invertível, $\forall p \in M$.*

Demonstração. Imediata das definições e do último teorema. \square

Corolário 2.4.8. *Uma função diferenciável e bijetiva $F : M^m \rightarrow N^n$ é um difeomorfismo sse $m = n$ e dF_p é invertível, $\forall p \in M$.*

Demonstração. Se F é um difeomorfismo, então F é um difeomorfismo local em todo $p \in M$, donde segue que dF_p é invertível, $\forall p \in M$. Por outro lado, se dF_p é invertível, $\forall p \in M$, usamos o corolário anterior para garantir que $\forall q \in N$ existe uma vizinhança $V \subseteq N$ de q tal que $F^{-1}|_V$ é diferenciável, e disso segue que F^{-1} é um difeomorfismo. \square

Os difeomorfismos são extremamente importantes no estudo das variedades diferenciáveis, pois, do ponto de vista desta teoria, duas variedades diferenciáveis difeomorfas são indistinguíveis.

Para encerrar esta seção, assim como dar subsídios para a próxima, vamos examinar como podemos usar as funções diferenciáveis para transformar os fibrados tangentes.

Considere uma função diferenciável $F : M^m \rightarrow N^n$. Para cada $(p, v) \in TM$, como $v \in T_p M$, podemos aplicar a diferencial dF_p em v , obtendo um vetor tangente $dF_p(v) \in T_{F(p)} N$. Isso nos leva a definir a função $dF : TM \rightarrow TN$ por

$$dF(p, v) = (F(p), dF_p(v)).$$

Usando a notação $(p, v) = v_p$, podemos escrever

$$dF(v_p) = dF_p(v_p),$$

observando também que é bastante claro que $dF_p(v_p) \in T_{F(p)} N$. Esta função é a chamada *diferencial* de F .

Teorema 2.4.9. *Sejam M^m, N^n, Q^q variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N, G : N \rightarrow Q$ aplicações suaves. Então:*

- (a) $dF : TM \rightarrow TN$ é uma função diferenciável;
- (b) dF é linear em cada fibra de TM ;
- (c) $d(G \circ F) = dG \circ dF$;
- (d) $d(\text{id}_M) = \text{id}_{TM}$.

Demonstração. (a) Seja $F : M^m \rightarrow N^n$ uma função diferenciável. Para mostrar que $dF : TM \rightarrow TN$ é diferenciável, sejam (\mathcal{U}, Φ) e (\mathcal{V}, Ψ) cartas em TM e TN determinadas pela cartas (U, ϕ) e (V, ψ) de M e N , respectivamente, tais que $dF(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$.

Para cada $(x, v) \in \Phi(\mathcal{U}) = \phi(U) \times \mathbb{R}^m$, temos

$$\begin{aligned} \Psi \circ dF \circ \Phi^{-1}(x, v) &= \Psi \circ dF \left(\phi^{-1}(x), \sum_{j=1}^m v^j \partial_j|_{\phi^{-1}(x)} \right) \\ &= \Psi \left(F \circ \phi^{-1}(x), \sum_{j=1}^m v^j \cdot dF_{\phi^{-1}(x)}(\partial_j|_{\phi^{-1}(x)}) \right) \\ &= (\star). \end{aligned}$$

Lembrando da proposição 2.4.3,

$$dF_{\phi^{-1}(x)}(\partial_j|_{\phi^{-1}(x)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \Big|_x \cdot \tilde{\partial}_i|_{F(\phi^{-1}(x))},$$

e temos, então,

$$\begin{aligned} (\star) &= \Psi \left(F \circ \phi^{-1}(x), \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \Big|_x \cdot v^j \right) \tilde{\partial}_i|_{F(\phi^{-1}(x))} \right) \\ &= \left(\psi \circ F \circ \phi^{-1}(x), \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial(\psi \circ F \circ \phi^{-1})^i}{\partial x^j} \Big|_x \cdot v^j \right)_{i=1}^n \right). \end{aligned}$$

Definindo, como fizemos na demonstração do teorema 2.4.6, a função $\tilde{F} = \psi \circ F \circ \phi^{-1}$, que é diferenciável, podemos escrever a identidade acima na forma

$$\Psi \circ dF \circ \Phi^{-1}(x, v) = \left(\tilde{F}(x), d\tilde{F}_x(v) \right).$$

Como isto define uma função diferenciável de $\Phi(\mathcal{U})$ em $\Psi(\mathcal{V})$, segue da definição que dF é diferenciável em \mathcal{U} . A arbitrariedade na escolha das cartas faz com que dF seja suave.

- (b) Seja $p \in M$ e $\pi^{-1}(p) = T_p M$ a fibra de TM sobre p . Decorre da definição de dF que $dF|_{T_p M} = dF_p$, que é uma função linear.

(c) Dado $v_p \in TM$, temos

$$\begin{aligned} d(G \circ F)(v_p) &= d(G \circ F)_p(v_p) \\ &= dG_{F(p)}(dF_p(v_p)) \\ &= dG(dF(v_p)), \end{aligned}$$

donde $d(G \circ F) = dG \circ dF$.

(d) Para cada $v_p \in TM$,

$$\begin{aligned} d(\text{id}_M)(v_p) &= d(\text{id}_M)_p(v_p) \\ &= \text{id}_{T_p M}(v_p) \\ &= v_p. \quad \square \end{aligned}$$

A diferencial de uma função contém não apenas as informações referentes aos espaços tangentes, mas também a respeito da própria função. Se $X : M \rightarrow TM$ é um campo vetorial suave qualquer, então $\forall p \in M$ temos

$$\begin{aligned} \pi_{TN} \circ dF \circ X(p) &= \pi_{TN}(F(p), dF_p(X_p)) \\ &= F(p), \end{aligned}$$

e disso decorre que $F = \pi_{TN} \circ dF \circ X$. Podemos resumir esta propriedade no seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ \uparrow X & & \downarrow \pi_{TN} \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

O próximo resultado fornece uma propriedade importante da diferencial e que será de grande valia no estudo mais aprofundado que faremos, na próxima seção, a respeito dos campos vetoriais.

Proposição 2.4.10. *Se $F : M^m \rightarrow N^n$ é um difeomorfismo, então $dF : TM \rightarrow TN$ também é um difeomorfismo.*

Demonstração. O fato de F ser um difeomorfismo implica que dF e $d(F^{-1})$ estão bem-definidas e são diferenciáveis. Para verificar que dF é um difeomorfismo, é suficiente que $(dF)^{-1} = d(F^{-1})$; no entanto, isso é consequência imediata das partes (c) e (d) do teorema 2.4.9, o que mostra o resultado. \square

Curvas Suaves

Seja M uma variedade diferenciável. Uma *curva suave* em M é uma função diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$, em que $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo aberto. O *vetor velocidade* de γ em $t_0 \in I$ é o vetor tangente

$$\dot{\gamma}(t_0) = d\gamma_{t_0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right).$$

Observe que, dada $f \in \mathcal{F}(M)$, temos

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t_0)(f) &= d\gamma_{t_0} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) (f) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} (f \circ \gamma) \\ &= \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t_0),\end{aligned}$$

isto é, $\dot{\gamma}(t_0)$ atua sobre as funções diferenciáveis derivando-as ao longo de γ em t_0 .

Um dos fatos mais marcantes a respeito das curvas suaves numa variedade é o seguinte:

Teorema 2.4.11. *Sejam M uma variedade diferenciável e $p \in M$. Para cada $v \in T_p M$, existe uma curva suave $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$.*

Demonstração. Seja (U, ϕ) uma carta local ao redor de p e escreva

$$v = \sum_{i=1}^m v^i \partial_i|_p,$$

em que $\{\partial_i|_p\}_{i=1}^m$ é a base de $T_p M$ determinada por (U, ϕ) . Seja

$$\tilde{v} = (v^1, \dots, v^m) \in \mathbb{R}^m$$

e defina

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow M$$

por

$$\gamma(t) = \phi^{-1}(\phi(p) + t\tilde{v}),$$

em que $\varepsilon > 0$ é escolhido pequeno o suficiente para que $\phi(p) + t\tilde{v} \in \phi(U)$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

É claro que γ assim definida é suave e que $\gamma(0) = p$. Além disso, temos que

$$\dot{\gamma}(0) = \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}(0)^i \partial_i|_p,$$

com

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(0)^i &= \dot{\gamma}(0)(\phi^i) \\ &= \dot{\gamma}(0)(\pi^i \circ \phi) \\ &= \frac{d(\phi \circ \gamma)^i}{dt}(0) \\ &= v^i.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\dot{\gamma}(0) = \sum_{i=1}^m v^i \partial_i|_p = v. \quad \square$$

2.5 Mais Sobre Campos Vetoriais

Nas duas seções anteriores, estudamos, separadamente, os campos vetoriais e as diferenciais de funções suaves. Nesta seção, vamos explorar as relações existentes entre esses dois conceitos.

Considere uma função diferenciável $F : M \rightarrow N$ e os campos vetoriais $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$. Estas informações podem ser visualizadas no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ \uparrow X & & \uparrow Y \\ M & \xrightarrow{F} & N \end{array}$$

Caso exista, a comutatividade deste diagrama, expressa pela equação

$$Y \circ F = dF \circ X,$$

pode ser usada para estudar as propriedades de um dos campos a partir do outro e de F .

Definição 2.5.1. Dados $F : M^m \rightarrow N^n$ diferenciável, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$, dizemos que os campos X e Y estão F -relacionados se o diagrama acima comuta, i.e., se $Y \circ F = dF \circ X$.

Exemplo 2.5.2. Seja $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(t) = (\sin t, \cos t)$. Sabemos (veja o exemplo 2.4.4) que esta função é diferenciável e que sua diferencial é dada por

$$dF \left(\lambda \frac{d}{dt} \Big|_t \right) = -\lambda \sin t \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F(t)} + \lambda \cos t \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{F(t)}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Considere os campos $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ e $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ definidos por

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{d}{dt} \Big|_t \\ Y_{(x,y)} &= -y \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{(x,y)} + x \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{(x,y)}. \end{aligned}$$

Afirmamos que X e Y estão F -relacionados. De fato, $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} (dF \circ X)_t &= dF \left(\frac{d}{dt} \Big|_t \right) \\ &= -\sin t \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{F(t)} + \cos t \frac{\partial}{\partial y} \Big|_{F(t)} \\ &= (Y \circ F)_t. \end{aligned}$$

△

Observe que, de maneira geral, não podemos isolar nem X nem Y na equação

$$Y \circ F = dF \circ X.$$

Isso significa, se assumirmos conhecidos F e X , e desejarmos determinar se existe algum campo Y que está F -relacionado com X , então, em geral, a equação acima não pode ser usada para construir Y . Portanto, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, nem sempre pode-se garantir a existência de um campo $Y \in \mathfrak{X}(N)$ que esteja F -relacionado com X .

No entanto, na situação especial em que F é um difeomorfismo, este problema não surge.

Teorema 2.5.3. *Se $F : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo, então para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ existe um único $Y \in \mathfrak{X}(N)$ de modo que X e Y estão F -relacionados.*

Demonstração. A hipótese de F ser um difeomorfismo significa que F é bijetiva e F^{-1} é suave. Com isso, defina $Y : N \rightarrow TN$ por $Y = dF \circ X \circ F^{-1}$. É imediato que Y é uma função diferenciável, e é fácil ver desta definição que, caso Y seja um campo vetorial, então X e Y estão F -relacionados.

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{dF} & TN \\ \uparrow X & & \uparrow Y \\ M & \xleftarrow{F^{-1}} & N \end{array}$$

Para ver que Y é um campo vetorial, tome $q \in N$ qualquer. Então,

$$X \circ F^{-1}(q) = X_{F^{-1}(q)} \in T_{F^{-1}(q)}M,$$

de modo que

$$dF \circ X \circ F^{-1}(q) \in T_{F(F^{-1}(q))}N = T_qN.$$

Logo $Y_q \in T_qN$, $\forall q \in N$, como queríamos.

Falta mostrar que Y é o único campo em N que está F -relacionado com X ; porém, isso é imediato da definição 2.5.1 e da construção de Y . \square

Como consequência deste teorema, dado um difeomorfismo $F : M \rightarrow N$, podemos definir uma função $F_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ que a cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ associa o único campo vetorial Y em N que está F -relacionado com X . As propriedades de F_* são descritas no próximo resultado.

Proposição 2.5.4. *Sejam M, N, Q variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N, G : N \rightarrow Q$ difeomorfismos. São válidas as seguintes afirmações:*

(a) F_* é linear;

$$(b) (G \circ F)_* = G_* \circ F_*;$$

$$(c) (\text{id}_M)_* = \text{id}_{\mathfrak{X}(M)}.$$

Demonstração. (a) Sejam $X, X' \in \mathfrak{X}(M)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que

$$\begin{aligned} F_*(X + \lambda X') &= dF \circ (X + \lambda X') \circ F^{-1} \\ &= dF \circ (X \circ F^{-1} + \lambda(X' \circ F^{-1})); \end{aligned}$$

a segunda igualdade decorre da definição de adição de campos vetoriais. Como a função dF é linear sobre cada fibra de TM (que são os espaços tangentes), da definição de campo vetorial segue que

$$\begin{aligned} dF \circ (X \circ F^{-1} + \lambda X' \circ F^{-1}) &= dF \circ X \circ F^{-1} + \lambda(dF \circ X' \circ F^{-1}) \\ &= F_*X + \lambda F_*X'. \end{aligned}$$

Portanto,

$$F_*(X + \lambda X') = F_*X + \lambda F_*X',$$

como era desejado.

(b) Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} (G \circ F)_*X &= d(G \circ F) \circ X \circ (G \circ F)^{-1} \\ &= dG \circ dF \circ X \circ F^{-1} \circ G^{-1} \\ &= (G_* \circ F_*)X, \end{aligned}$$

o que mostra que $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$.

(c) Para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} (\text{id}_M)_*X &= d(\text{id}_M) \circ X \circ (\text{id}_M)^{-1} \\ &= X, \end{aligned}$$

e, portanto, $(\text{id}_M)_* = \text{id}_{\mathfrak{X}(M)}$. □

Corolário 2.5.5. *Dado um difeomorfismo $F : M \rightarrow N$, a aplicação F_* é um isomorfismo linear natural entre $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathfrak{X}(N)$.*

Demonstração. Como F_* é linear, para mostrar que esta função é um isomorfismo é suficiente verificar que F_* é bijetiva. Além disso, como a sua definição independe de quaisquer escolhas de bases, teremos ao final que F_* é um isomorfismo natural.

Considere a transformação linear $(F^{-1})_*$, definida entre $\mathfrak{X}(N)$ e $\mathfrak{X}(M)$. Da parte (b) do teorema vem que

$$\begin{aligned} F_* \circ (F^{-1})_* &= (F \circ F^{-1})_* = (\text{id}_N)_* \\ (F^{-1})_* \circ F_* &= (F^{-1} \circ F)_* = (\text{id}_M)_*. \end{aligned}$$

Portanto, da parte (c) temos

$$\begin{aligned} F_* \circ (F^{-1})_* &= \text{id}_{\mathfrak{X}(N)} \\ (F^{-1})_* \circ F_* &= \text{id}_{\mathfrak{X}(M)}, \end{aligned}$$

o que mostra que $(F^{-1})_* = (F_*)^{-1}$. \square

Vamos mostrar que F_* é, na verdade, um isomorfismo de álgebras de Lie. Entretanto, como o colchete de Lie de campos vetoriais foi construído a partir da ação destes sobre as funções reais diferenciáveis, antes de prosseguirmos precisamos do seguinte critério:

Lema 2.5.6. *Seja $F : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável. Então, os campos $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y \in \mathfrak{X}(N)$ estão F -relacionados sse $\forall f \in \mathcal{F}(N)$ tem-se*

$$X(f \circ F) = (Yf) \circ F.$$

Demonstração. Primeiro, note que $X(f \circ F), (Yf) \circ F \in \mathcal{F}(M)$, $\forall f \in \mathcal{F}(N)$. Deste modo, tome $p \in M$; então,

$$\begin{aligned} X(f \circ F)(p) &= X_p(f \circ F) \\ &= dF_p(X_p)(f) \\ &= (dF \circ X)(p)(f) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (Yf) \circ F(p) &= Yf(F(p)) \\ &= Y_{F(p)}(f) \\ &= (Y \circ F)(p)(f). \end{aligned}$$

Como estas igualdades valem $\forall p \in M$ e $\forall f \in \mathcal{F}(N)$, a partir delas é fácil ver que X e Y estão F -relacionados sse $X(f \circ F) = (Yf) \circ F$, $\forall f \in \mathcal{F}(N)$. \square

Observe que, se $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ são tais que X_i e Y_i estão F -relacionados, $i = 1, 2$, então, dada $f \in \mathcal{F}(N)$, é imediato do lema que

$$\begin{aligned} X_1(f \circ F) &= (Y_1f) \circ F \\ X_2(f \circ F) &= (Y_2f) \circ F. \end{aligned}$$

Como $X_1(f \circ F), (Y_1f) \circ F \in \mathcal{F}(M)$, podemos aplicar o campo X_2 em ambos os membros da primeira equação, e disso segue que $X_2X_1(f \circ F) = X_2((Y_1f) \circ F)$. Por outro lado, escrevendo $g = Y_1f$, vemos que $g \in \mathcal{F}(N)$, de modo que podemos aplicar o lema novamente:

$$\begin{aligned} X_2((Y_1f) \circ F) &= X_2(g \circ F) \\ &= (Y_2g) \circ F \\ &= (Y_2Y_1f) \circ F. \end{aligned}$$

Portanto,

$$X_2 X_1(f \circ F) = (Y_2 Y_1 f) \circ F.$$

De maneira análoga,

$$X_1 X_2(f \circ F) = (Y_1 Y_2 f) \circ F.$$

Fazendo a diferença entre essas duas equações, temos

$$(X_1 X_2 - X_2 X_1)(f \circ F) = ((Y_1 Y_2 - Y_2 Y_1)f) \circ F,$$

isto é,

$$[X_1, X_2](f \circ F) = ([Y_1, Y_2]f) \circ F.$$

Como esta igualdade vale $\forall f \in \mathcal{F}(N)$, decorre do lema que $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ estão F -relacionados. Esta argumentação mostra o seguinte resultado:

Teorema 2.5.7. *Se $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ e $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{X}(N)$ são tais que X_i e Y_i estão F -relacionados, $i = 1, 2$, então $[X_1, X_2]$ e $[Y_1, Y_2]$ também estão F -relacionados.*

Corolário 2.5.8. *Seja $F : M \rightarrow N$ um difeomorfismo. Então, a função $F_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ é um isomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração. Como F_* é um isomorfismo linear, basta mostrar que F_* é um homomorfismo de álgebras de Lie. De fato, dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, temos da definição de F_* que X_i e $F_* X_i$ estão F -relacionados, $i = 1, 2$. Pelo teorema anterior, isso implica que $[F_* X_1, F_* X_2]$ está F -relacionado com $[X_1, X_2]$; como $F_*[X_1, X_2] \in \mathfrak{X}(N)$ também goza desta propriedade, segue que

$$F_*[X_1, X_2] = [F_* X_1, F_* X_2],$$

como desejado. □

Capítulo 3

Grupos de Lie

Grupos de Lie são objetos em que estão compatibilizadas uma estrutura algébrica — a de grupo — e uma estrutura diferenciável. Esta relação tem como consequência um grande número de resultados profundos. Neste capítulo, propomos analisar alguns deles, além de finalmente mostrarmos que os grupos lineares são grupos de Lie com um tipo de estrutura diferenciável bastante particular.

3.1 Definições e Exemplos

O conceito de grupo linear, que apresentamos no primeiro capítulo, possui muitas aplicações ao estudo da Geometria, assim como em outras áreas. Mostramos algumas delas na seção 1.7. No entanto, restringir a nossa atenção apenas a tais grupos limita muito a diversidade de problemas que podemos estudar.

Por exemplo, seja $E(n)$ o grupo das congruências do espaço \mathbb{R}^n , isto é,

$$E(n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n : \|f(x)\| = \|x\|, \forall x \in \mathbb{R}^n\},$$

em que $\|\cdot\|$ denota a norma euclideana. Pode-se mostrar que cada $f \in E(n)$ é da forma

$$f(x) = u + a(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

em que $u \in \mathbb{R}^n$ e $a \in O(\mathbb{R}^n)$. Logo, $E(n)$ não é um grupo linear¹.

Muitos outros grupos de transformações não são lineares, como: isometrias numa variedades riemanniana (ou pseudo-riemanniana), automorfismos de um espaço afim, transformações de Galileu, entre outros.

Mesmo que, depois, nos deparemos com o fato de que todos esses grupos sejam isomorfos a grupos lineares, precisamos, a princípio, de uma noção mais geral para descrevê-los.

¹Por outro lado, pode-se mostrar que $E(n)$ é isomorfo a um subgrupo de $GL(\mathbb{R}^{n+1})$, mas isso é uma questão da *teoria de representações*.

Definição 3.1.1. Um grupo de Lie é um grupo G munido de uma estrutura diferenciável de modo que as funções

$$\begin{aligned} (g, h) &\in G \times G \longmapsto gh \in G \\ g &\in G \longmapsto g^{-1} \in G \end{aligned}$$

são diferenciáveis, considerando em $G \times G$ a estrutura de variedade produto.

Observações:

- (1) O elemento neutro de G será denotado, como é usual, por e .
- (2) A exigência de que a operação de grupo e a inversão sejam diferenciáveis pode ser substituída pela de que

$$(g, h) \in G \times G \longmapsto gh^{-1} \in G$$

seja suave.

Exemplo 3.1.2. Seja E um espaço vetorial real de dimensão finita e normado. Isso define, como vimos na seção 2.1, uma estrutura diferenciável em E através de uma única carta (E, ϕ) , em que $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo linear. Considerando a operação

$$(u, v) \in E \times E \rightarrow u + v \in E,$$

vemos que E é um grupo de Lie abeliano. \triangle

Exemplo 3.1.3. Em $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, considere a estrutura de subvariedade aberta e a de grupo com a operação de multiplicação. Não é difícil mostrar que isso faz de \mathbb{R}^* um grupo de Lie. O mesmo vale para \mathbb{C}^* e \mathbb{H}^* , em que \mathbb{H} denota o anel dos números quaternions. \triangle

Exemplo 3.1.4. Seja E um espaço real normado e de dimensão finita e considere o grupo linear $GL(E)$. Considerando para $GL(E)$ a estrutura diferenciável dada no exemplo 2.1.10 e as operações usuais de grupo, temos que $GL(E)$ é um grupo de Lie, pois, dados $a, b \in GL(E)$, as entradas matriciais de ab em qualquer base são funções polinomiais das entradas de a e b . Além disso, escrevendo a matriz de a^{-1} em termos da matriz dos cofatores, as entradas da matriz de a^{-1} são funções racionais cujo denominador (que é $\det(a)$) jamais se anula. \triangle

Exemplo 3.1.5. Seja G e H grupos de Lie. Considere em $G \times H$, o produto direto de G e H , a estrutura de variedade produto. Lembre que a operação em questão é dada por

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2),$$

para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e $h_1, h_2 \in H$. Afirmamos que $G \times H$, com esta estrutura, é um grupo de Lie. De fato, dadas cartas (U_i, ϕ_i) em G e (V_i, ψ_i) em

H , com $i = 1, 2, 3$, considere as cartas $(U_i \times V_i, \phi_i \times \psi_i)$ em $G \times H$. Assumindo que, para cada $(g_1, h_1) \in U_1 \times V_1$ e $(g_2, h_2) \in U_2 \times V_2$, tenhamos

$$(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2) \in U_3 \times V_3,$$

então, dado

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (\phi_1 \times \psi_1) \times (\phi_2 \times \psi_2)((U_1 \times V_1) \times (U_2 \times V_2)),$$

temos

$$\begin{aligned} & \phi_3 \times \psi_3 \left(((\phi_1 \times \psi_1)^{-1}(x_1, y_1)) \cdot ((\phi_2 \times \psi_2)^{-1}(x_2, y_2)) \right) = \\ &= \phi_3 \times \psi_3 \left((\phi_1^{-1}(x_1), \psi_1^{-1}(y_1)) \cdot (\phi_2^{-1}(x_2), \psi_2^{-1}(y_2)) \right) = \\ &= \phi_3 \times \psi_3 \left(\phi_1^{-1}(x_1) \phi_2^{-1}(x_2), \psi_1^{-1}(y_1) \psi_2^{-1}(y_2) \right) = \\ &= \left(\phi_3 \left(\phi_1^{-1}(x_1) \phi_2^{-1}(x_2) \right), \psi_3 \left(\psi_1^{-1}(y_1) \psi_2^{-1}(y_2) \right) \right), \end{aligned}$$

o que define uma função diferenciável. Além disso, se $\forall (g, h) \in U_1 \times V_1$ tivermos $(g^{-1}, h^{-1}) \in U_2 \times V_2$, então $\forall (x, y) \in \phi_1 \times \psi_1(U_1 \times V_1)$ vale

$$\begin{aligned} \phi_2 \times \psi_2 \left(((\phi_1 \times \psi_1)^{-1}(x, y))^{-1} \right) &= \phi_2 \times \psi_2 \left((\phi_1^{-1}(x))^{-1}, (\phi_2^{-1}(y))^{-1} \right) \\ &= \left(\phi_2 \left((\phi_1^{-1}(x))^{-1} \right), \psi_2 \left((\phi_2^{-1}(y))^{-1} \right) \right), \end{aligned}$$

o que também define uma função diferenciável.

A partir disso, não é difícil mostrar que o produto direto de uma família finita qualquer de grupos de Lie também é um grupo de Lie. \triangle

Definição 3.1.6. *Um homomorfismo entre grupos de Lie G e H é uma função suave $\Phi : G \rightarrow H$ que também é um homomorfismo de grupos. Um isomorfismo é um homomorfismo bijetivo cuja inversa também é um homomorfismo de grupos de Lie.*

Observação: Uma vez que a função inversa de um homomorfismo de grupos sempre é um tal homomorfismo, para que um homomorfismo de grupos de Lie bijetivo seja um isomorfismo é suficiente que a sua inversa seja diferenciável.

Definição 3.1.7. *Sejam G um grupo de Lie e M uma variedade diferenciável. Uma ação à esquerda de G sobre M é uma função diferenciável $\alpha : G \times M \rightarrow M$ tal que*

$$(i) \quad \alpha(gh, p) = \alpha(g, \alpha(h, p)), \quad \forall g, h \in G, \quad \forall p \in M;$$

$$(ii) \quad \alpha(e, p) = p, \quad \forall p \in M.$$

Analogamente, uma ação à direita de G sobre M é uma função suave $\alpha : M \times G \rightarrow M$ que satisfaz

$$(iii) \quad \alpha(p, gh) = \alpha(\alpha(p, g), h), \quad \forall g, h \in G, \quad \forall p \in M;$$

(iv) $\alpha(p, e) = p, \forall p \in M$.

Dada uma ação à esquerda $\alpha : G \times M \rightarrow M$, para cada $g \in G$ considere a função $\alpha_g : M \rightarrow M$ dada por $\alpha_g(p) = \alpha(g, p)$. A condição (i) significa que $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h, \forall g, h \in G$, e a condição (ii), que $\alpha_e = \text{id}_M$. Observe que cada α_g é um difeomorfismo em M , pois

- $\alpha_g = \alpha \circ i_g^2, \forall g \in G$, em que $i_g^2 : M \rightarrow G \times M$ é dada por $i_g^2(p) = (g, p)$. Como i_g^2 é diferenciável (seção 2.2), segue que α_g é suave.
- $\alpha_{g^{-1}} = (\alpha_g)^{-1}$ também é diferenciável.

O mesmo vale para ações à direita, com a única diferença de que, neste caso, $\alpha_{gh} = \alpha_h \circ \alpha_g$.

Exemplo 3.1.8. Dados G um grupo de Lie e M uma variedade quaisquer, defina $\alpha : G \times M \rightarrow M$ por $\alpha(g, p) = p$. É fácil ver que esta função é uma ação à esquerda de G sobre M , a *ação trivial*. \triangle

Exemplo 3.1.9. Dado um grupo de Lie G , defina

$$\begin{aligned} L & : G \times G \rightarrow G \\ R & : G \times G \rightarrow G \end{aligned}$$

por

$$\begin{aligned} L(g, h) & = gh \\ R(g, h) & = hg. \end{aligned}$$

A definição de grupo de Lie implica imediatamente que L e R são diferenciáveis, e dos axiomas de grupo decorre que L é uma ação à esquerda e R , à direita.

Observe que L e R são ações *livres*, no sentido que, se $g \in G$ é tal que $L_g(h) = h$ ou $R_g(h) = h$ para algum $h \in G$, então $g = e$. Além disso, elas são *transitivas*, isto é, dados $h_1, h_2 \in G$ quaisquer, existem $g_1, g_2 \in G$ tais que

$$\begin{aligned} L_{g_1}(h_1) & = h_2 \\ R_{g_2}(h_1) & = h_2; \end{aligned}$$

a saber, $g_1 = h_2 h_1^{-1}$ e $g_2 = h_1^{-1} h_2$. Observe que de L e R serem livres temos que g_1 e g_2 são únicos. \triangle

As ações apresentadas no exemplo anterior são de grande importância na teoria dos grupos de Lie, pois elas fornecem, para quaisquer dois pontos do grupo, um difeomorfismo *global* (i.e., definido na variedade inteira) que leva um ponto no outro. Veremos isso com detalhes na próxima seção.

Vamos ver, agora, uma maneira de construir um novo grupo de Lie a partir do produto cartesiano de dois outros que generaliza o produto direto.

Seja G, H grupos de Lie e $\alpha : H \times G \rightarrow G$ uma ação à esquerda de H sobre G tal que $\forall h \in H$ a função $\alpha_h : G \rightarrow G$ é um homomorfismo de grupos de Lie. Uma vez que α_h é um difeomorfismo, para que esta última condição seja satisfeita é suficiente que α_h seja um homomorfismo de grupos. Observe que se α_h é um homomorfismo de grupos de Lie, $\forall h \in H$, então o mesmo vale para $\alpha_{h^{-1}} = (\alpha_h)^{-1}$, de modo que α_h é isomorfismo de grupos de Lie, $\forall h \in H$.

Considere a variedade $G \times H$ e defina $\forall g_1, g_2 \in G$ e $\forall h_1, h_2 \in H$

$$(g_1, h_1) \cdot_{\alpha} (g_2, h_2) = (g_1 \cdot \alpha_{h_1}(g_2), h_1 h_2).$$

Não é difícil mostrar que esta operação define uma estrutura de grupo em $G \times H$, cujo neutro é

$$(e_G, e_H)$$

e cujo inverso do elemento (g, h) é

$$(\alpha_{h^{-1}}(g^{-1}), h^{-1}).$$

Este grupo é chamado *produto semi-direto* de G e H , e é denotado por $G \rtimes_{\alpha} H$. Usando o fato de que α é suave, um argumento semelhante ao apresentado para o produto direto de grupos de Lie mostra que a operação de $G \rtimes_{\alpha} H$ é suave, assim como a inversão. Portanto, $G \rtimes_{\alpha} H$ é um grupo de Lie.

Exemplo 3.1.10. Considere os grupos de Lie \mathbb{R}^n e $GL(\mathbb{R}^n)$, o primeiro munido da operação de adição e o segundo, da composição. Defina $\alpha : GL(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\alpha(a, u) = a(u).$$

É fácil ver que α é uma ação de $GL(\mathbb{R}^n)$ sobre \mathbb{R}^n e que α_a é um homomorfismo de grupos de Lie, $\forall a \in GL(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $\mathbb{R}^n \rtimes GL(\mathbb{R}^n)$ é um grupo de Lie (aqui, omitimos o símbolo α , pois esta ação é canônica), chamado de *grupo afim* de \mathbb{R}^n .

Cada elemento (u, a) de $\mathbb{R}^n \rtimes GL(\mathbb{R}^n)$ deve ser interpretado como uma aplicação

$$(u, a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

definida por

$$(u, a)(x) = u + a(x);$$

isto é, $\mathbb{R}^n \rtimes GL(\mathbb{R}^n)$ é o grupo das aplicações afins bijetivas de \mathbb{R}^n . Observe que, dados $(u, a), (v, b) \in \mathbb{R}^n \rtimes GL(\mathbb{R}^n)$, temos $\forall x \in \mathbb{R}^n$ que

$$\begin{aligned} (u, a) \circ (v, b)(x) &= (u, a)(v + b(x)) \\ &= u + a(v + b(x)) \\ &= (u + a(v)) + ab(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} (u, a) \circ (v, b) &= (u + a(v), ab) \\ &= (u + \alpha_a(v), ab), \end{aligned}$$

o que motiva de maneira natural a multiplicação em $\mathbb{R}^n \rtimes GL(\mathbb{R}^n)$. \triangle

Exemplo 3.1.11. Um dos principais objetivos deste trabalho, que será cumprido na seção 3.3, é mostrar que todo grupo linear é um grupo de Lie. Em particular, $O(\mathbb{R}^n)$ é um grupo de Lie. Com isso, o grupo $E(n)$ das congruências de \mathbb{R}^n é um grupo de Lie, pois

$$E(n) = \mathbb{R}^n \rtimes_{\alpha} O(\mathbb{R}^n),$$

em que α é a restrição a $O(\mathbb{R}^n)$ da ação apresentada no exemplo anterior. \triangle

Apesar de que muitos grupos de Lie não sejam, a princípio, grupos lineares — pois seus elementos não são operadores lineares —, podemos tentar construir isomorfismos entre membros das duas classes.

Definição 3.1.12. Uma representação de um grupo de Lie G é um homomorfismo de grupos de Lie

$$\Phi : G \longrightarrow GL(E),$$

em que E é um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita. Caso ϕ seja injetiva, dizemos que ela é fiel.

O estudo das representações de grupos (em particular, dos de Lie) recebe o nome de Teoria de Representações. O papel desta teoria não é apenas obter propriedades para os grupos, mas também usar estas propriedades para obter informações sobre os espaços sobre os quais eles agem. Por exemplo, E pode ser o espaço de soluções de uma dada equação diferencial, e o homomorfismo transforma G no grupo de simetrias da equação.

Exemplo 3.1.13. Vamos mostrar uma representação fiel de $\mathbb{R}^n \rtimes GL(\mathbb{R}^n)$ em $GL(\mathbb{R}^{n+1})$. Defina $\Phi : \mathbb{R}^n \rtimes GL(\mathbb{R}^n) \rightarrow GL(\mathbb{R}^{n+1})$ por

$$\Phi(u, a)(x, t) = (tu + a(x), t),$$

para $(u, a) \in \mathbb{R}^n \rtimes GL(\mathbb{R}^n)$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Note que Φ está bem-definida, pois, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $s, t, \lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \Phi(u, a)(x + \lambda y, t + \lambda s) &= ((t + \lambda s)u + a(x + \lambda y), t + \lambda s) \\ &= (tu + a(x), t) + \lambda(su + a(y), s) \\ &= \Phi(u, a)(x, t) + \lambda\Phi(u, a)(y, s). \end{aligned}$$

Além disso, se $(x, t) \in \ker(\Phi(u, a))$, então

$$\Phi(u, a)(x, t) = (tu + a(x), t) = 0,$$

de modo que $t = 0$ e, portanto, $x = 0$.

A função Φ é um homomorfismo de grupos, pois dados $(u, a), (v, b) \in \mathbb{R}^n \rtimes GL(\mathbb{R}^n)$, então $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned}\Phi((u, a) \cdot (v, b))(x, t) &= \Phi(u + a(v), ab)(x, t) \\ &= (t(u + a(v)) + ab(x), t) \\ &= (tu + a(tv + b(x)), t) \\ &= \Phi(u, a)(tv + b(x), t) \\ &= \Phi(u, a)\Phi(v, b)(x, t).\end{aligned}$$

Esta representação também é fiel, pois, se $(u, a) \in \ker(\Phi)$, então $\Phi(u, a) = \text{id}_{\mathbb{R}^{n+1}}$, de modo que

$$\Phi(u, a)(0, t) = (tu, t) = (0, t), \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow u = 0$$

e

$$\Phi(u, a)(x, 0) = (a(x), 0) = (x, 0), \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow a = \text{id}_{\mathbb{R}^n}.$$

Logo, $(u, a) = (0, \text{id}_{\mathbb{R}^n})$. Por fim, a diferenciabilidade de ϕ decorre de podermos escrever $\forall (u, a) \in \mathbb{R}^n \rtimes GL(\mathbb{R}^n)$

$$[\Phi(u, a)] = \begin{pmatrix} a & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

numa base apropriada: as entradas da matriz são funções diferenciáveis de (u, a) . \triangle

3.2 A Álgebra de Lie de um Grupo de Lie

Seja G um grupo de Lie. Dados $g, h \in G$, as funções

$$L_{hg^{-1}}, R_{g^{-1}h} : G \rightarrow G$$

são difeomorfismos que satisfazem

$$L_{hg^{-1}}(g) = R_{g^{-1}h}(g) = h.$$

Este comentário mostra o seguinte:

Lema 3.2.1. *Seja G um grupo de Lie. Então, $\forall g, h \in G$ existe um difeomorfismo*

$$F : G \rightarrow G$$

tal que $F(g) = h$.

Muitas das propriedades dos grupos de Lie decorrem deste fato, como, por exemplo, o seguinte:

Lema 3.2.2. *Dados $g, h \in G$, os espaços $T_g G$ e $T_h G$ são naturalmente isomorfos. Em particular, $T_g G$ é naturalmente isomorfo a $T_e G$, $\forall g \in G$.*

Observação: Numa variedade diferenciável M qualquer, os espaços tangentes têm todos a mesma dimensão, o que os faz serem isomorfos. No entanto, estes isomorfismos não são, em geral, naturais, pois dependem de bases induzidas por cartas locais.

Demonstração. Sendo $L_{hg^{-1}} : G \rightarrow G$ um difeomorfismo tal que $L_{hg^{-1}}(g) = h$, então $d(L_{hg^{-1}}) : T_g G \rightarrow T_h G$ é um isomorfismo natural. O mesmo vale para $R_{g^{-1}h}$. \square

Considere X um campo vetorial sobre G , suave ou não. Dados $g, h \in G$, podemos transportar $X_g \in T_g G$ por $d(L_{hg^{-1}})$ ou $d(R_{g^{-1}h})$ até $T_h G$ e compará-lo com X_h (veja a figura 3.1).

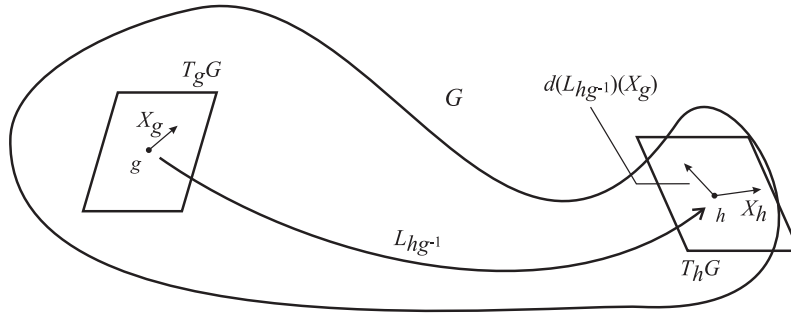


Figura 3.1: O transporte de X_g por $d(L_{hg^{-1}})$.

Definição 3.2.3. Sejam G um grupo de Lie e X um campo vetorial em G . Dizemos que X é invariante à esquerda se $\forall g, h \in G$ tem-se

$$X_h = d(L_{hg^{-1}})(X_g),$$

e invariante à direita se $\forall g, h \in G$

$$X_h = d(R_{g^{-1}h})(X_g).$$

Observação: Decorre de L e R serem ações livres que, dados $g, h \in G$, $L_{hg^{-1}}$ é a única translação à esquerda que leva g em h e $R_{g^{-1}h}$, a única à direita. Chamamos atenção a este fato, pois caso tivéssemos mais de uma translação à esquerda ou à direita levando g em h , então teríamos problemas com a definição acima.

Os campos invariantes à esquerda e à direita estão relacionados da seguinte maneira:

Lema 3.2.4. Se X é um campo invariante à esquerda, então o campo Y definido por

$$Y_g = d(R_g) \circ d(L_{g^{-1}})(X_g),$$

é invariante à direita. Similarmente, se X é invariante à direita, então

$$Y_g = d(L_g) \circ d(R_{g^{-1}})(X_g)$$

é invariante à esquerda.

Demonstração. Mostraremos apenas a primeira das afirmações, pois a outra é análoga. Primeiro, note que o campo Y dado por

$$Y_g = d(R_g) \circ d(L_{g^{-1}})(X_g)$$

é, de fato, um campo vetorial, pois

$$X_g \in T_g G \Rightarrow d(L_{g^{-1}})(X_g) \in T_e G \Rightarrow Y_g \in T_g G.$$

Além disso, dados $g, h \in G$, temos

$$\begin{aligned} d(R_{g^{-1}h})(Y_g) &= d(R_{g^{-1}h}) \circ d(R_g) \circ d(L_{g^{-1}})(X_g) \\ &= d(R_h) \circ d(L_{g^{-1}})(X_g) \\ &= d(R_h) \circ d(L_{h^{-1}}) \circ d(L_{hg^{-1}})(X_g) \\ &= d(R_h) \circ d(L_{h^{-1}})(X_h) \\ &= Y_h \quad \square \end{aligned}$$

Denote por $\mathfrak{l}(G)$ e $\mathfrak{r}(G)$ os conjuntos dos campos vetoriais em G invariantes à esquerda e à direita, respectivamente. É fácil ver que $\mathfrak{l}(G)$ e $\mathfrak{r}(G)$ são espaços vetoriais reais, pois, por exemplo, dados $X, Y \in \mathfrak{l}(G)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos $\forall g, h \in G$ que

$$\begin{aligned} (X + \lambda Y)_h &= X_h + \lambda Y_h \\ &= d(L_{hg^{-1}})(X_g) + \lambda d(L_{hg^{-1}})(Y_g) \\ &= d(L_{hg^{-1}})(X_g + \lambda Y_g), \end{aligned}$$

além de 0 ser, obviamente, um campo invariante.

Com isso, podemos usar o lema para definir a aplicação

$$T : \mathfrak{l}(G) \longrightarrow \mathfrak{r}(G)$$

por

$$T(X)_g = d(R_g) \circ d(L_{g^{-1}})(X_g), \quad \forall X \in \mathfrak{l}(G), \quad \forall g \in G.$$

É imediato que T é linear, e o lema também implica que T é bijetiva, pois, definindo $S : \mathfrak{r}(G) \rightarrow \mathfrak{l}(G)$ por

$$S(X)_g = d(L_g) \circ d(R_{g^{-1}})(X_g), \quad \forall X \in \mathfrak{r}(G), \quad \forall g \in G,$$

vemos que $S = T^{-1}$. Isso mostra o seguinte resultado:

Proposição 3.2.5. *Os espaços $\mathfrak{l}(G)$ e $\mathfrak{r}(G)$ são naturalmente isomorfos.*

Conseqüentemente, a análise das propriedades dos campos invariantes basta ser feita para um dos dois tipos. O padrão é fazê-lo para $\mathfrak{l}(G)$.

Proposição 3.2.6. *Seja X um campo vetorial em um grupo de Lie G . São equivalentes as seguintes afirmações:*

- (a) X é invariante à esquerda;
- (b) $X_g = d(L_g)(X_e)$, $\forall g \in G$;
- (c) X está L_g -relacionado consigo mesmo, $\forall g \in G$.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b): Se $X \in \mathfrak{l}(G)$, então $\forall g \in G$

$$X_g = d(L_{ge^{-1}})(X_e) = d(L_g)(X_e).$$

(b) \Rightarrow (c): Lembrando a definição, precisamos mostrar que

$$d(L_g) \circ X = X \circ L_g, \quad \forall g \in G,$$

De fato, dados $g, h \in G$

$$X \circ L_g(h) = X_{gh},$$

e, por hipótese,

$$X_{gh} = d(L_{gh})(X_e) = d(L_g) \circ d(L_h)(X_e) = d(L_g)(X_h).$$

Portanto,

$$X \circ L_g(h) = X_{gh} = d(L_g) \circ X(h).$$

(c) \Rightarrow (a): Se X está L_g -relacionado consigo mesmo $\forall g \in G$, então

$$X = d(L_g) \circ X \circ L_{g^{-1}}, \quad \forall g \in G,$$

uma vez que L_g é um difeomorfismo. Em particular, dados $g, h \in G$, temos que

$$\begin{aligned} X &= d(L_{hg^{-1}}) \circ X \circ L_{(hg^{-1})^{-1}} \\ &= d(L_{hg^{-1}}) \circ X \circ L_{gh^{-1}}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} X_h &= d(L_{hg^{-1}}) \circ X \circ L_{gh^{-1}}(h) \\ &= d(L_{hg^{-1}})(X_g). \quad \square \end{aligned}$$

Este lema oferece critérios úteis para verificar se um dado campo é invariante à esquerda. Por exemplo, podemos usá-lo para mostrar o seguinte:

Teorema 3.2.7. *A função de avaliação $\epsilon : \mathfrak{l}(G) \rightarrow T_e G$ que a cada $X \in \mathfrak{l}(G)$ associa $X_e \in T_e G$ é um isomorfismo linear natural. Em particular, $\dim(\mathfrak{l}(G)) = \dim(G)$.*

Demonstração. A função ϵ é claramente linear, pela definição das operações entre campos vetoriais, e independe de qualquer escolha de bases. Para mostrar que é bijetiva, construiremos explicitamente uma inversa.

Dado $v \in T_e G$, para cada $g \in G$ temos que

$$d(L_g)(v) \in T_g G,$$

o que mostra que a função

$$\tilde{v} : G \longrightarrow TG$$

dada por

$$\tilde{v}_g = d(L_g)(v)$$

é um campo vetorial. É imediato que $\tilde{v}_e = v$, e do lema decorre que $\tilde{v} \in \mathfrak{l}(G)$. Deste modo, defina $T : T_e G \rightarrow \mathfrak{l}(G)$ como a função que a cada $v \in T_e G$ associa \tilde{v} . Afirmamos que $T = \epsilon^{-1}$, o que de fato ocorre, pois, dados $X \in \mathfrak{l}(G)$, $v \in T_e G$ e $g \in G$, temos

$$\begin{aligned} ((T \circ \epsilon)(X))_g &= (\widetilde{X_e})_g \\ &= d(L_g)(X_e) \\ &= X_g \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ((\epsilon \circ T)(v)) &= \tilde{v}_e \\ &= v. \quad \square \end{aligned}$$

Corolário 3.2.8. *Se (v_1, \dots, v_n) é uma base de $T_e G$, então $(\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n)$ é uma base de $\mathfrak{l}(G)$.*

A noção de campo invariante à esquerda com que estamos trabalhando não faz distinção entre os suaves e os não suaves. O seguinte resultado mostra que isso não importa.

Teorema 3.2.9. $\mathfrak{l}(G) \subseteq \mathfrak{X}(G)$.

Demonstração. De acordo com o teorema anterior, é suficiente mostrar que $\tilde{v} \in \mathfrak{X}(G)$, $\forall v \in T_e G$. Para tanto, dado $v \in T_e G$, precisamos provar que $\tilde{v}f \in \mathcal{F}(G)$, $\forall f \in \mathcal{F}(G)$.

Seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow G$ uma curva suave tal que $\gamma(0) = e$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Dada $f \in \mathcal{F}(G)$, defina

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \times G \rightarrow \mathbb{R}$$

por

$$F(t, g) = f \circ L_g \circ \gamma(t) = f(g\gamma(t)).$$

Como G é um grupo de Lie, então F é suave. Dados $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e $g \in G$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t_0, g) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t_0} f \circ L_g \circ \gamma \\ &= \dot{\gamma}(t_0)(f \circ L_g) \\ &= d(L_g)(\dot{\gamma}(t_0))(f), \end{aligned}$$

pelas definições de $\dot{\gamma}(t_0)$ e de $d(L_g)$. Tomando $t_0 = 0$ e lembrando que $\dot{\gamma}(0) = v$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t}(0, g) &= d(L_g)(v)(f) \\ &= \tilde{v}_g(f) \\ &= \tilde{v}f(g).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{v}f(g) = \frac{\partial F}{\partial t}(0, g), \quad \forall g \in G$$

o que mostra que $\tilde{v}f$ é diferenciável. \square

Com base neste teorema e na proposição 3.2.6, temos o seguinte corolário, cuja demonstração é imediata.

Corolário 3.2.10. *Sejam G um grupo de Lie e X um campo vetorial em G . São equivalentes:*

- (a) $X \in \mathfrak{l}(G)$;
- (b) X é suave e $(L_g)_*X = X, \forall g \in G$.

Corolário 3.2.11. $\mathfrak{l}(G)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$.

Demonstração. O teorema mostra que $\mathfrak{l}(G)$ é um subespaço (de dimensão finita) de $\mathfrak{X}(G)$. Além disso, dados $X_1, X_2 \in \mathfrak{l}(G)$ temos, do corolário anterior, que

$$(L_g)_*[X_1, X_2] = [(L_g)_*X_1, (L_g)_*X_2] = [X_1, X_2],$$

o que significa que $[X_1, X_2] \in \mathfrak{l}(G)$. \square

Definição 3.2.12. A álgebra de Lie de um grupo de Lie G , denotada por \mathfrak{g} ou $\text{Lie}(G)$, é a álgebra de Lie dos campos vetoriais em G invariantes à esquerda.

Exemplo 3.2.13. Uma questão importante é se será possível definir em

$$\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

uma operação de grupo que o torne, com a estrutura diferenciável usual, um grupo de Lie. Suponha, por absurdo, que sim.

Dados G um grupo de Lie e $X \in \mathfrak{l}(G)$ (que, como mostramos, é suave), a parte (b) da proposição 3.2.6 implica a seguinte dicotomia:

- ou $X_g = 0, \forall g \in G$ (caso $X_e = 0$);
- ou $X_g \neq 0, \forall g \in G$ (caso $X_e \neq 0$).

Com isso, como $\dim(\mathbb{S}^2) = 2$, certamente existe $v \in T_e\mathbb{S}^2$ não nulo, de modo que \tilde{v} jamais se anula. No entanto, um conhecido resultado de Topologia mostra que *todo campo vetorial contínuo em \mathbb{S}^2 se anula em algum ponto*, o que torna a existência de \tilde{v} impossível. Portanto, tal operação não pode existir. \triangle

Procedendo com relação a $\mathfrak{r}(G)$ de maneira análoga ao que fizemos para $\mathfrak{l}(G)$, mostra-se também que $\mathfrak{r}(G)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(G)$. Além disso, pode-se demonstrar que o isomorfismo linear que exibimos entre $\mathfrak{l}(G)$ e $\mathfrak{r}(G)$ é também um homomorfismo de álgebras de Lie.

Como $\mathfrak{l}(G)$ e T_eG são espaços vetoriais isomorfos, podemos definir um colchete de Lie em T_eG através deste isomorfismo. Explicitamente, dados $u, v \in T_eG$, definimos

$$[u, v] = [\tilde{u}, \tilde{v}]_e.$$

Isso faz de T_eG uma álgebra de Lie isomorfa a $\mathfrak{l}(G)$.

Exemplo 3.2.14. Vamos mostrar que a álgebra de Lie do grupo de Lie $GL(E)$ é isomorfa a $\mathfrak{gl}(E)$, em que E é um espaço vetorial real de dimensão finita. Para tanto, é suficiente que $\text{Lie}(GL(E))$ seja isomorfa a $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$. Fixada uma base β para E , considere a carta $(GL(E), \phi_\beta)$ para $GL(E)$ (veja o exemplo 2.1.10). Seja, para cada $a \in GL(E)$, $\{\partial_{ij}|_a\}_{i,j=1}^n$ a base de $T_aGL(E)$ determinada por $(GL(E), \phi_\beta)$.

A função

$$T : T_{\text{id}_E}GL(E) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$$

dada por

$$T \left(\sum_{i,j=1}^n X^{ij} \partial_{ij}|_{\text{id}_E} \right) = (X^{ij})_{i,j=1}^n$$

é um isomorfismo linear. Mostrando que T também é um homomorfismo de álgebras de Lie, temos o resultado desejado.

Tome $X \in T_{\text{id}_E}GL(E)$ e escreva

$$X = \sum_{i,j=1}^n X^{ij} \partial_{ij}|_{\text{id}_E}.$$

O campo invariante à esquerda determinado por X é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{X}_a &= d(L_a)X \\ &= d(L_a) \left(\sum_{i,j=1}^n X^{ij} \partial_{ij}|_{\text{id}_E} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n X^{ij} d(L_a) (\partial_{ij}|_{\text{id}_E}). \end{aligned}$$

Como L_a é a restrição a $GL(E)$ de um operador linear em $\mathcal{L}(E)$, então $d(L_a)$ é dada em coordenadas locais pela mesma matriz de L_a , de modo que

$$\begin{aligned} d(L_a)(\partial_{ij}|_{\text{id}_E}) &= \sum_{k,l=1}^n \left(\sum_{p=1}^n a^{kp} \delta_{ip} \delta_{jl} \right) \partial_{kl}|_a \\ &= \sum_{k=1}^n a^{ki} \partial_{kj}|_a, \end{aligned}$$

em que a^{ki} são as entradas da matriz de a na base β . Com isso,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_a &= \sum_{i,j,k=1}^n a^{ki} X^{ij} \partial_{kj}|_a \\ &= \sum_{j,k=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a^{ki} X^{ij} \right) \partial_{kj}|_a. \end{aligned}$$

Portanto, as funções coordenadas de \tilde{X} são dadas por

$$\tilde{X}_a^{kj} = \sum_{i=1}^n a^{ki} X^{ij}, \quad \forall a \in GL(E).$$

Agora, dados $X, Y \in T_{\text{id}_E} GL(E)$, pela proposição 2.3.16 temos

$$[\tilde{X}, \tilde{Y}] = \sum_{p,q=1}^n \left[\sum_{j,k=1}^n \tilde{X}^{kj} \left(\partial_{kj} \tilde{Y}^{pq} \right) - \tilde{Y}^{kj} \left(\partial_{kj} \tilde{X}^{pq} \right) \right] \partial_{pq}.$$

Por outro lado, $\forall a \in GL(E)$

$$\begin{aligned} \left(\partial_{kj} \tilde{Y}^{pq} \right) \Big|_a &= \partial_{kj}|_a \left(\sum_{i=1}^n a^{pi} Y^{iq} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n Y^{iq} \partial_{kj}|_a (a^{pi}) \\ &= \sum_{i=1}^n Y^{iq} \delta_{kp} \delta_{ji} \\ &= \delta_{kp} Y^{jq}, \end{aligned}$$

e, similarmente,

$$\left(\partial_{kj} \tilde{X}^{pq} \right) \Big|_a = \delta_{kp} X^{jq}.$$

Então,

$$\begin{aligned} [\tilde{X}, \tilde{Y}] &= \sum_{p,q=1}^n \left[\sum_{j,k=1}^n \delta_{kp} \left(\tilde{X}^{kj} Y^{jq} - \tilde{Y}^{kj} X^{jq} \right) \right] \partial_{pq} \\ &= \sum_{p,q=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \tilde{X}^{pj} Y^{jq} - \tilde{Y}^{pj} X^{jq} \right) \partial_{pq}. \end{aligned}$$

Avaliando a expressão acima em id_E , temos

$$\begin{aligned}
 [\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\text{id}_E} &= \sum_{p,q=1}^n \left(\sum_{j=1}^n X^{pj} Y^{jq} - Y^{pj} X^{jq} \right) \partial_{pq}|_{\text{id}_E} \\
 &= \sum_{p,q=1}^n (T(X)T(Y) - T(Y)T(X))^{pq} \partial_{pq}|_{\text{id}_E} \\
 &= \sum_{p,q=1}^n [T(X), T(Y)]^{pq} \partial_{pq}|_{\text{id}_E},
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
 T[X, Y] &= T([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{\text{id}_E}) \\
 &= [T(X), T(Y)],
 \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. \triangle

Dados grupos de Lie G e H e um homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \rightarrow H$, podemos nos perguntar que relações Φ determina entre as álgebras de Lie \mathfrak{g} e \mathfrak{h} . Estas relações, algumas das quais veremos adiante, são as ferramentas que permitem o estudo sistemático dos grupos de Lie por reduzirem muitas questões a respeito destes grupos a problemas envolvendo álgebras de Lie. Isso, junto com o papel importante que as álgebras de Lie assumem na descrição de muitos fenômenos, motivou um profundo estudo das álgebras de Lie, como o leitor pode conferir em (SAN MARTIN, 1999).

Sejam G e H grupos de Lie, \mathfrak{g} e \mathfrak{h} suas respectivas álgebras de Lie e $\Phi : G \rightarrow H$ um homomorfismo de grupos de Lie.

Teorema 3.2.15. *Para cada $X \in \mathfrak{g}$, existe um único $Y \in \mathfrak{h}$ tal que X e Y estão Φ -relacionados.*

Demonstração. Para que $Y \in \mathfrak{h}$ esteja Φ -relacionado com X , é necessário que

$$d\Phi(X_e) = Y_{\Phi(e)} = Y_e,$$

lembrando que, como Φ é um homomorfismo de grupos, então $\Phi(e) = e$. Como todo $Y \in \mathfrak{h}$ é unicamente determinado por Y_e , se existe algum $Y \in \mathfrak{h}$ que está Φ -relacionado com X , ele é único.

A equação acima nos motiva a definir Y por

$$Y_h = d(L_h)(d\Phi(X_e)).$$

Claramente, $Y \in \mathfrak{h}$. Para mostrar que Y está Φ -relacionado com X , precisamos provar que

$$d\Phi \circ X = Y \circ \Phi.$$

Dado $g \in G$, temos

$$\begin{aligned} d\Phi(X_g) &= d\Phi \circ d(L_g)(X_e) \\ &= d(\Phi \circ L_g)(X_e). \end{aligned}$$

Como Φ é um homomorfismo de grupos, então $\forall g_1, g_2 \in G$

$$\begin{aligned} \Phi \circ L_{g_1}(g_2) &= \Phi(g_1 g_2) \\ &= \Phi(g_1) \Phi(g_2) \\ &= L_{\Phi(g_1)}(\Phi(g_2)), \end{aligned}$$

de modo que

$$\Phi \circ L_g = L_{\Phi(g)} \circ \Phi, \quad \forall g \in G.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d\Phi(X_g) &= d(L_{\Phi(g)} \circ \Phi)(X_e) \\ &= d(L_{\Phi(g)})(d\Phi(X_e)) \\ &= d(L_{\Phi(g)})(Y_e) \\ &= Y_{\Phi(g)}, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. \square

Com isso, podemos definir a função $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ que a cada $X \in \mathfrak{g}$ associa o único $\phi(X) \in \mathfrak{h}$ que está Φ -relacionado com X . Explicitamente, dado $X \in \mathfrak{g}$,

$$\phi(X)_h = d(L_h \circ \Phi)(X_e), \quad \forall h \in H.$$

Como um campo invariante é unicamente determinado por seu valor em e e

$$\phi(X)_e = d(\Phi)(X_e), \quad \forall X \in \mathfrak{g},$$

então ϕ é, em essência, a diferencial de Φ em e .

Teorema 3.2.16. $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Demonstração. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, pela definição de ϕ temos que $\phi[X, Y]$ é o único campo em \mathfrak{h} que está Φ -relacionado com $[X, Y]$. Por outro lado, $[\phi(X), \phi(Y)]$ também possui esta propriedade, do que concluímos

$$\phi[X, Y] = [\phi(X), \phi(Y)]. \quad \square$$

A aplicação $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ é chamada de *homomorfismo induzido* por Φ . Muitas propriedades dos homomorfismos de grupos de Lie podem ser estudadas através dos homomorfismos induzidos entre as álgebras de Lie, o que é considerado mais simples por envolver estruturas puramente algébricas. Por causa disso, existem muitos resultados para reforçar estas relações, os famosos *teoremas de correspondência de Lie*. Um deles é o seguinte:

Teorema 3.2.17. *Sejam G, H grupos de Lie, com G simplesmente conexo², e $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ as respectivas álgebras de Lie. Então, para cada homomorfismo de álgebras de Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ existe um único homomorfismo de grupos de Lie $\Phi : G \rightarrow H$ cujo homomorfismo induzido é ϕ .*

A demonstração, que não faremos aqui, pode ser vista em (LEE, 2003). O próximo resultado mostra as principais propriedades do homomorfismo induzido.

Teorema 3.2.18. *Sejam G, H, K grupos de Lie,*

$$\begin{aligned}\Phi : G &\rightarrow H \\ \Psi : H &\rightarrow K\end{aligned}$$

homomorfismos de grupos de Lie e

$$\begin{aligned}\phi : \mathfrak{g} &\rightarrow \mathfrak{h} \\ \psi : \mathfrak{h} &\rightarrow \mathfrak{k}\end{aligned}$$

os respectivos homomorfismos induzidos. Então,

- (a) $\psi \circ \phi$ é o homomorfismo induzido por $\Psi \circ \Phi$;
- (b) o homomorfismo induzido por id_G é $\text{id}_{\mathfrak{g}}$;
- (c) se Φ é um isomorfismo de grupos de Lie, então ϕ é um isomorfismo de álgebras de Lie.

Demonstração. (a) Denote por η o homomorfismo induzido por $\Psi \circ \Phi$. Então, para cada $X \in \mathfrak{g}$ e cada $k \in K$, temos

$$\begin{aligned}\eta(X)_k &= d(L_k)(d(\Psi \circ \Phi)(X_e)) \\ &= d(L_k)(d\Psi(d\Phi(X_e))).\end{aligned}$$

Por outro lado, $\forall h \in H$

$$\phi(X)_h = d(L_h)(d\Phi(X_e)) \Rightarrow d\Phi(X_e) = \phi(X)_e,$$

o que implica

$$\begin{aligned}\eta(X)_k &= d(L_k)(d\Psi(\phi(X)_e)) \\ &= \psi(\phi(X))_k.\end{aligned}$$

- (b) Sendo η o homomorfismo induzido por id_G , temos $\forall X \in \mathfrak{g}$ e $\forall g \in G$ que

$$\begin{aligned}\eta(X)_g &= d(L_g)(d(\text{id}_G)(X_e)) \\ &= d(L_g)(X_e) \\ &= X_g.\end{aligned}$$

²Um espaço topológico X é dito *simplesmente conexo* se X é conexo por caminhos e se grupo fundamental é trivial. Mais informações podem ser vistas em (WILLARD, 1970, 2004).

- (c) Segue dos itens anteriores que o homomorfismo induzido por Φ^{-1} é a função inversa de ϕ , do que segue o resultado. \square

Uma maneira de rephrasear a parte (c) do teorema é a seguinte:

Corolário 3.2.19. *Grupos de Lie isomorfos possuem álgebras de Lie isomorfas.*

3.3 De Volta aos Grupos Lineares

Na seção 3.1, mostramos, para E um espaço vetorial real ou complexo de dimensão finita, que $GL(E)$ é um grupo de Lie com as estruturas usuais. O que podemos dizer a respeito dos outros grupos lineares? Será possível definir para eles uma estrutura diferenciável que os torne grupos de Lie?

Esta segunda pergunta tem uma resposta imediata: dado G um grupo qualquer, para cada $g \in G$ seja $U_g = \{g\}$ e $\phi_g : U_g \rightarrow \mathbb{R}^0$ dada por $\phi_g(g) = g$. Não é difícil mostrar que $\{(U_g, \phi_g) : g \in G\}$ é um atlas em G e que, com esta estrutura diferenciável, G é um grupo de Lie.

Por causa desta possível trivialização, precisamos exigir algo mais restrito da estrutura diferenciável dos grupos lineares.

Definição 3.3.1. *Sejam M, N variedades diferenciáveis, com $M \subseteq N$. Dizemos que M é uma subvariedade de N se M é um subespaço topológico de N e a função de inclusão $i : M \rightarrow N$, $i(p) = p$, é diferenciável e di_p é injetiva, $\forall p \in M$.*

Podemos tentar construir uma estrutura para os grupos lineares que os faça serem subvariedades de $GL(E)$. Sendo eles também subgrupos de $GL(E)$, isso motiva a seguinte definição:

Definição 3.3.2. *Seja G um grupo de Lie. Um subgrupo de Lie de G é uma subvariedade de G que é um grupo de Lie com a operação induzida de G .*

O problema de exigir que *todos* os grupos lineares sejam subgrupos de Lie de $GL(E)$ é que, ao considerarmos subgrupos como \mathbb{Q}^* , vemos que esta condição jamais será satisfeita. De fato, sendo \mathbb{Q} enumerável, o único modo de construir em \mathbb{Q}^* uma estrutura diferenciável é com a topologia discreta, e desta maneira \mathbb{Q}^* não é uma subvariedade de \mathbb{R}^* .

O critério adequado é o seguinte:

Teorema 3.3.3. *Seja G um grupo linear. Então, existe uma única estrutura diferenciável em G tal que*

- (a) *munido desta estrutura, G é um grupo de Lie;*
- (b) *se G é um subconjunto fechado de $GL(E)$, então G é um subgrupo de Lie de $GL(E)$.*

A parte (b) do teorema é conhecido como *Teorema do Subgrupo Fechado* (ou melhor, um caso particular dele). Não faremos a demonstração deste item no trabalho, mas o leitor pode consultá-la em (ROSSMANN, 2002). Construiremos a estrutura diferenciável para G e verificaremos que G , com ela, é um grupo de Lie.

Antes de começarmos, salientamos que os conceitos e os resultados apresentados nas seções 1.2, 1.4 e 1.6 serão essenciais no trabalho que faremos, de modo que é bastante adequado fazermos uma revisão destes tópicos.

Dado um grupo linear G e \mathfrak{g} a sua álgebra de Lie (como foi definida na seção 1.3), seja \mathfrak{h} um subespaço de $\mathcal{L}(E)$ suplementar a \mathfrak{g} , isto é, tal que

$$\mathcal{L}(E) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}.$$

Defina $\Phi : \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h} \rightarrow \mathcal{L}(E)$ por

$$\Phi(X + Y) = e^X e^Y,$$

para cada $X \in \mathfrak{g}$ e cada $Y \in \mathfrak{h}$. A função Φ possui as seguintes propriedades:

- Φ é diferenciável;
- $d\Phi_0 = \text{id}_{\mathcal{L}(E)}$;
- para cada $X \in \mathfrak{g}$, $\Phi(X) = e^X \in G$.

O primeiro e o segundo pontos implicam, pelo Teorema da Função Inversa, que existem vizinhanças $U, V \subseteq \mathcal{L}(E)$ de 0 e id_E , respectivamente, tais que $\Phi : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo. Como cada elemento de U é da forma $X + Y$, para únicos $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$, a inversa $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$ se escreve $\forall a \in V$ como

$$\Phi^{-1}(a) = \xi(a) + \eta(a), \text{ com } \xi(a) \in \mathfrak{g} \text{ e } \eta(a) \in \mathfrak{h},$$

o que define funções suaves

$$\begin{aligned} \xi & : V \rightarrow \mathfrak{g} \\ \eta & : V \rightarrow \mathfrak{h}. \end{aligned}$$

Dado $a \in V$, se $\eta(a) = 0$, então $a \in G$, pois, neste caso,

$$a = \Phi(\Phi^{-1}(a)) = \Phi(\xi(a)) = e^{\xi(a)} \in G.$$

Além disso, como parte de um critério para verificar se um $a \in V$ pertence ou não a G , mostramos (proposição 1.4.8) que existe uma vizinhança $\Omega \subseteq V$ de id_E tal que $\forall a \in \Omega$ temos

$$d\eta_a(Xa) = 0, \forall X \in \mathfrak{g}.$$

Para contruirmos um atlas para G , precisamos, primeiro, fornecer as cartas locais. Considere a função $\exp : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$; como \exp é diferenciável e $d\exp_0 = \text{id}_{\mathcal{L}(E)}$, existem vizinhanças $A, B \subseteq \mathcal{L}(E)$ de 0 e id_E , respectivamente, tais que $\exp : A \rightarrow B$ é um difeomorfismo e sua inversa é dada por \log (como definida na seção 1.2). Sem perda de generalidade, podemos assumir que $B \subseteq \Omega$ e que $A = B(0, R)$, com $R > 0$.

Para cada $r \in (0, R)$, sejam

$$B_{\mathfrak{g}}(0, r) = \{X \in \mathfrak{g} : \|X\| < r\} \subseteq A$$

e

$$U(e, r) = \exp(B_{\mathfrak{g}}(0, r)) \subseteq B.$$

Para cada $a \in G$ e cada $r \in (0, R)$, defina

$$\begin{aligned} U(a, r) &= U(e, r) \cdot a \\ &= \{e^X a : X \in B_{\mathfrak{g}}(0, r)\} \end{aligned}$$

e $\phi_{(a, r)} : U(a, r) \rightarrow B_{\mathfrak{g}}(0, r)$ por

$$\phi_{(a, r)}(b) = \log(ba^{-1}).$$

Sendo cada $\phi_{(a, r)}$ bijetiva, com inversa dada por

$$\phi_{(a, r)}^{-1}(X) = e^X a, \quad \forall X \in B_{\mathfrak{g}}(0, r),$$

e com imagem aberta em \mathfrak{g} , temos que $(U(a, r), \phi_{(a, r)})$ é uma carta em G , $\forall a \in G$, $\forall r \in (0, R)$. Aqui vale observar que não faz diferença se o contradomínio da carta está em \mathbb{R}^n ou qualquer outro espaço real normado e de dimensão finita.

Teorema 3.3.4. *O conjunto*

$$\mathcal{A} = \{(U(a, r), \phi_{(a, r)}) : a \in G, r \in (0, R)\}$$

é um atlas para o grupo linear G que o torna uma variedade diferenciável de dimensão $\dim(\mathfrak{g})$.

Demonstração. Uma vez que, dado $r \in (0, R)$,

$$G = \bigcup_{a \in G} U(a, r),$$

basta mostrarmos a compatibilidade entre as cartas. Sejam $a, b \in G$ e $r_1, r_2 \in (0, R)$, e considere as cartas $(U(a, r_1), \phi_{(a, r_1)})$ e $(U(b, r_2), \phi_{(b, r_2)})$. Assumindo que

$$\begin{aligned} &\phi_{(a, r_1)}(U(a, r_1) \cap U(b, r_2)) \\ &\phi_{(b, r_2)}(U(a, r_1) \cap U(b, r_2)) \end{aligned}$$

são abertos em \mathfrak{g} , temos que

$$\begin{aligned}\phi_{(a,r_1)} \circ \phi_{(b,r_2)}^{-1}(X) &= \log(e^X b a^{-1}) \\ \phi_{(b,r_2)} \circ \phi_{(a,r_1)}^{-1}(X) &= \log(e^X a b^{-1}),\end{aligned}$$

o que, de fato, definem funções suaves.

Para mostrar que

$$\Gamma := \phi_{(a,r_1)}(U(a, r_1) \cap U(b, r_2))$$

é um subconjunto aberto de \mathfrak{g} , e um argumento análogo mostra o mesmo para

$$\phi_{(b,r_2)}(U(a, r_1) \cap U(b, r_2)),$$

tome $X_0 \in \Gamma$. Isso significa que $X_0 \in B_{\mathfrak{g}}(0, r_1)$ e que existe $Y_0 \in B_{\mathfrak{g}}(0, r_2)$ tal que

$$e^{X_0} a = e^{Y_0} b.$$

Precisamos provar que existe $r > 0$ de modo que $B_{\mathfrak{g}}(X_0, r) \subseteq B_{\mathfrak{g}}(0, r_1)$ e que $\forall X \in B_{\mathfrak{g}}(X_0, r)$ existe $Y \in B_{\mathfrak{g}}(0, r_2)$ tal que

$$e^X a = e^Y b \Leftrightarrow e^X a b^{-1} = e^Y.$$

A idéia aqui é levantar o problema de volta para $\mathcal{L}(E)$ e usar o que sabemos da função exponencial.

Considere a função $F : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$ dada por

$$F(X) = e^X a b^{-1}.$$

É imediato que F é contínua (pois é diferenciável), e

$$F(X_0) = e^{X_0} a b^{-1} = e^{Y_0} \in \exp(B(0, r_2)).$$

Esse conjunto é aberto em $\mathcal{L}(E)$, pois $B(0, r_2) \subseteq A$ e $\exp : A \rightarrow B$ é um difeomorfismo. Logo, existe $r > 0$ tal que

$$B(X_0, r) \subseteq B(0, r_1)$$

e que $\forall X \in B(X_0, r)$ tem-se que $F(X) \in \exp(B(0, r_2))$, isto é, existe $Y \in B(0, r_2)$ com $e^X a b^{-1} = e^Y$.

Com isso, $B_{\mathfrak{g}}(X_0, r) \subseteq B_{\mathfrak{g}}(0, r_1)$ é tal que $\forall X \in B_{\mathfrak{g}}(X_0, r)$ existe $Y \in B(0, r_2)$ tal que $e^X a b^{-1} = e^Y$. Só falta mostrar que tal Y deve pertencer a \mathfrak{g} . Seja, então, $X \in B_{\mathfrak{g}}(X_0, r)$ e considere a curva $\gamma : (-\varepsilon, 1 + \varepsilon) \rightarrow G$ dada por

$$\gamma(t) = e^{X_0 + t(X - X_0)} a b^{-1}.$$

É imediato que γ é suave, que $\gamma(t) \in B \subseteq \Omega$ para todo t , que $\gamma(0) = e^{X_0} a b^{-1} = e^{Y_0}$ e que $\gamma(1) = e^X a b^{-1}$. Portanto, pelo corolário 1.6.7, existe

$$\tilde{Y} \in B_{\mathfrak{g}}(0, R) = B(0, R) \cap \mathfrak{g}$$

tal que $e^X a b^{-1} = e^{\tilde{Y}}$. Como $e^X a b^{-1} = e^Y$ e $Y \in B(0, R)$, vizinhança de 0 na qual \exp é injetiva, então $Y = \tilde{Y} \in \mathfrak{g}$, o que completa a demonstração. \square

Observe que as vizinhanças coordenadas $U(a, r)$ não são, necessariamente, abertos de G na topologia induzida por $GL(E)$. Para ilustrar este fato, lembremos mais uma vez do grupo \mathbb{Q}^* .

Definição 3.3.5. *A topologia definida pelo atlas \mathcal{A} em G é chamada topologia de grupo.*

Dados $a \in G$ e $r \in (0, R)$, para cada $e^X a \in U(a, r)$ temos que

$$\begin{aligned} \|a - e^X a\| &\leq \|a\| \cdot \|e^X - \text{id}_E\| \\ &\leq \|a\| (e^{\|X\|} - 1) \\ &< \|a\| (e^r - 1), \end{aligned}$$

o que significa que

$$U(a, r) \subseteq B(a, \|a\| (e^r - 1)).$$

Com isso, dados $a, b \in G$ com $a \neq b$, seja $r \in (0, R)$ tal que

$$r < \log \left(1 + \frac{\|a - b\|}{\|a\| + \|b\|} \right);$$

logo,

$$\|a\| (e^r - 1) + \|b\| (e^r - 1) < \|a - b\|,$$

de modo que

$$B(a, \|a\| (e^r - 1)) \cap B(b, \|b\| (e^r - 1)) = \emptyset,$$

o que implica

$$U(a, r) \cap U(b, r) = \emptyset.$$

Esta discussão mostra:

Proposição 3.3.6. *A topologia de grupo é Hausdorff.*

Agora, precisamos mostrar que a operação dos grupos lineares e a inversão de elementos são funções diferenciáveis. Nesse sentido, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.7. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e G um grupo linear. Uma função $F : U \rightarrow G$ é diferenciável sse F é diferenciável como uma função em $\mathcal{L}(E)$, isto é, quando as entradas de matriz de F são diferenciáveis.*

Demonstração. Seja $(U(a, r), \phi_{(a, r)})$ uma carta em G . A função F se escreve, nesta carta, como

$$\phi_{(a, r)} \circ F(x) = \log (F(x)a^{-1}).$$

Desta expressão é fácil ver que, se as entradas de matriz de F são suaves, então $\phi_{(a, r)} \circ F$ é suave, de modo que $F : U \rightarrow G$ é diferenciável. Reciprocamente, se F é diferenciável, então $\phi_{(a, r)} \circ F$ é suave, para toda carta $(U(a, r), \phi_{(a, r)})$. Como

$$F(x) = e^{\phi_{(a, r)} \circ F(x)} a,$$

as entradas de matriz de F são suaves. □

Corolário 3.3.8. *Uma função $F : M \rightarrow G$, em que M é uma variedade diferenciável e G um grupo linear, é diferenciável sse as entradas de matriz de F são suaves.*

Demonstração. Dada uma carta local (U, ϕ) em M , basta aplicar o teorema à função

$$F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow G. \quad \square$$

Corolário 3.3.9. *Dado um grupo linear G , as funções*

$$\begin{aligned} (a, b) &\in G \times G \longmapsto ab \in G \\ a &\in G \longmapsto a^{-1} \in G \end{aligned}$$

são suaves.

Demonstração. Dados $a, b \in G$, a multiplicação se escreve em coordenadas locais ao redor de a e b como

$$(X, Y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longmapsto e^X a e^Y b \in G,$$

para X e Y em vizinhanças apropriadas de 0. Segue do teorema que esta função é diferenciável. Já a inversão se escreve como

$$X \in \mathfrak{g} \longmapsto a^{-1} e^{-X} \in G$$

para X próximo de 0, o que também é suave. \square

Este corolário completa a demonstração de que G é um grupo de Lie.

Exemplo 3.3.10. Considere o grupo linear

$$\begin{aligned} U(1) &= \{[\alpha] \in M(1, \mathbb{C}) : [\alpha] \cdot [\alpha]^H = [1]\} \\ &= \{[\alpha] \in M(1, \mathbb{C}) : |\alpha| = 1\}. \end{aligned}$$

Tomando em

$$\mathbb{S}^1 = \{\alpha \in \mathbb{C} : |\alpha| = 1\}$$

a estrutura diferenciável usual (veja a seção 2.1), a aplicação

$$[\alpha] \in U(1) \longmapsto \alpha \in \mathbb{S}^1,$$

vê-se facilmente, é um difeomorfismo. Logo, com a operação

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longmapsto \alpha\beta \in \mathbb{S}^1,$$

\mathbb{S}^1 é um grupo de Lie, isomorfo a $U(1)$. \triangle

Exemplo 3.3.11. Seja

$$\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ vezes}}$$

o *toro* n -dimensional. Com a estrutura de grupo dada pelo produto direto de \mathbb{S}^1 , \mathbb{T}^n é um grupo de Lie, isomorfo a

$$\underbrace{U(1) \times \cdots \times U(1)}_{n \text{ vezes}}.$$

Este grupo é isomorfo ao grupo linear $G \subseteq GL(n, \mathbb{C})$ cujos elementos são da forma

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \alpha_i \in \mathbb{S}^1.$$

△

Considerações Finais

A Teoria dos Grupos de Lie é vasta, ramificando-se em várias direções. Por um lado, pode-se estudar a teoria das representações, e nesta área se vê mais intensamente as relações dos grupos com as suas álgebras de Lie. Outro ponto, bastante relacionado ao anterior, é o das aplicações da teoria, que em tempos recentes tem adquirido maior vulto. Um outro estudo importante é o das álgebras de Lie *per se*, envolvendo teoria de representações, etc.

Os grupos de Lie fornecem um meio muito rico e interessante de trabalho, talvez por se encontrar numa confluência de diversos ramos da Matemática, como a Álgebra, Análise, Topologia e Geometria. Além disso, as suas aplicações vão desde problemas clássicos da Geometria (como ilustramos na seção 1.7) até questões de Mecânica Quântica e Equações Diferenciais.

Como os grupos de Lie de dimensão finita já possuem uma teoria bastante completa, muita pesquisa tem sido feita, nas últimas décadas, referente aos de dimensão infinita, que, inclusive, eram a principal preocupação de Sophus Lie. Entretanto, ainda não existe uma axiomatização completa destes grupos (que, muitas vezes, nem grupos são), o que complica bastante a situação. Um título recente que trata deste e outros assuntos é (KNAPP, 2002).

Apêndice A

O Teorema da Função Inversa

Neste apêndice, fornecemos demonstrações cuidadosas dos Teoremas da Função Inversa e Implícita.

Como trataremos de funções com diversas classes de diferenciabilidade, ao contrário do resto do trabalho, o termo *diferenciável* tem o seu significado tradicional relativo a aproximações lineares, e as demais classes serão denotadas por \mathcal{C}^k , $1 \leq k \leq \infty$.

Sejam $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos e seja $f : U \rightarrow V$ um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k . Usando a Regra da Cadeia, não é difícil mostrar que, para cada $p \in U$, df_p é invertível e que

$$(df_p)^{-1} = d(f^{-1})_{f(p)}.$$

Teorema A.1 (Função Inversa). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, e $p \in U$ tal que df_p é invertível. Então, existem vizinhanças $V \subseteq U$ de p e $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de $f(p)$ tais que $f : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k .*

Uma vez que f já é de classe \mathcal{C}^k , a demonstração deste teorema envolve apenas mostrar que f admite uma inversa local também de classe \mathcal{C}^k . Esta demonstração é difícil e um tanto longa, de modo que faremos algumas simplificações antes de começá-la.

Primeiro, afirmamos que podemos assumir, sem perda de generalidade, que $p = f(p) = 0$ e que $df_p = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. De fato, para $q \in \mathbb{R}^n$, seja $\tau_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por

$$\tau_q(x) = x + q;$$

é fácil ver que τ_q é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^∞ cuja inversa é τ_{-q} e cuja diferencial é constante e igual a $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Aplicando a translação τ_{-p} em U , obtemos um aberto U' ao redor de $0 = \tau_{-p}(p)$. Defina $\tilde{f} : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\tilde{f}(x) = ((df_p)^{-1} \circ \tau_{-f(p)} \circ f \circ \tau_p)(x).$$

Note que \tilde{f} possui a mesma classe de diferenciabilidade de f e que

$$\begin{aligned} d\tilde{f}_0 &= (df_p)^{-1} \circ \text{id}_{\mathbb{R}^n} \circ f \circ \text{id}_{\mathbb{R}^n} \\ &= \text{id}_{\mathbb{R}^n} \\ \tilde{f}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Supondo que o teorema esteja demonstrado para o caso particular mencionado, no qual \tilde{f} se encaixa, existem vizinhanças $V' \subseteq U'$ de 0 e $W' \subseteq \mathbb{R}^n$ de $\tilde{f}(0) = 0$ tais que $\tilde{f} : V' \rightarrow W'$ é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k . A partir disso, temos, tomando $V = \tau_p(V')$ e $W = \tau_{f(p)}(W')$, que V, W são vizinhanças de p e $f(p)$, respectivamente, tais que $f : V \rightarrow W$ é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k , pois

$$f(x) = (\tau_{f(p)} \circ df_p \circ \tilde{f} \circ \tau_{-p})(x).$$

Portanto, vamos assumir até o fim da demonstração que $p = f(p) = 0$ e que $df_p = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$. Observe que, como $df : U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é contínua e $df_0 \in GL(\mathbb{R}^n)$, que é um subconjunto aberto de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, então existe uma vizinhança $U' \subseteq U$ de 0 tal que $\forall x \in U'$ temos $df_x \in GL(\mathbb{R}^n)$. Trabalhando apenas com U' , podemos também assumir, sem perda de generalidade, que df_x é invertível, $\forall x \in U$.

Proposição A.2. *Sejam $V, W \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos e $f : V \rightarrow W$ uma função de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, que é bijetiva e tal que df_x é invertível, $\forall x \in V$. Se $g = f^{-1}$ é contínua, então g é de classe \mathcal{C}^k .*

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que g é diferenciável. Seja $q \in W$, $q = f(p)$. Por causa da Regra da Cadeia, se g é diferenciável em q , então $dg_q = (df_p)^{-1}$. Defina $s : W - q \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$s(k) = g(q + k) - g(q) - T^{-1}(k),$$

em que $T = df_p$. Para verificar a afirmação, é suficiente mostrar que $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{s(k)}{\|k\|} = 0$. Para cada $k \in \tau_{-q}(W)$, escreva $h = g(q + k) - g(q)$. Note que

$$k = f(p + h) - f(p) = T(h) + r(h), \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|}.$$

Pela continuidade de f e g , temos que $h \rightarrow 0$ sse $k \rightarrow 0$. Então,

$$\begin{aligned} h &= g(q + k) - g(q) \\ &= T^{-1}(k) + s(k) \\ &= T^{-1}(T(h) + r(h)) + s(k) \\ &= h + T^{-1}(r(h)) + s(k) \\ \Rightarrow s(k) &= -T^{-1}(r(h)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{s(k)}{\|k\|} = -\frac{\|h\|}{\|k\|} \cdot \frac{T^{-1}(r(h))}{\|h\|} = -\frac{\|h\|}{\|k\|} \cdot T^{-1} \left(\frac{r(h)}{\|h\|} \right).$$

Claramente, $\lim_{h \rightarrow 0} T^{-1} \left(\frac{r(h)}{\|h\|} \right) = 0$, e afirmação estará demonstrada quando provarmos que $\frac{\|h\|}{\|k\|}$ é limitado numa vizinhança de 0. De fato,

$$k = T(h) + r(h) \Rightarrow \|k\| \geq \|T(h)\| - \|r(h)\|,$$

e

$$\|h\| = \|T^{-1}(T(h))\| \leq \|T^{-1}\| \cdot \|T(h)\| \Rightarrow \|T(h)\| \geq \frac{\|h\|}{\|T^{-1}\|}.$$

Além disso, como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|h\| < \delta$ implica $\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} < \frac{1}{2\|T^{-1}\|}$. Portanto, se $\|h\| < \delta$ temos

$$\begin{aligned} \|k\| &\geq \|T(h)\| - \|r(h)\| = \|T(h)\| - \frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \cdot \|h\| \\ &\geq \frac{\|h\|}{\|T^{-1}\|} - \frac{\|h\|}{2\|T^{-1}\|} = \frac{\|h\|}{2\|T^{-1}\|}. \\ \Rightarrow \frac{\|h\|}{\|k\|} &\leq 2\|T^{-1}\|. \end{aligned}$$

Isso mostra que g é diferenciável em $q = f(p)$ e que $dg_q = (df_p)^{-1}$.

Falta mostrar que g é de classe \mathcal{C}^k . Como $dg = \iota \circ df \circ g$, em que

$$\iota : T \in GL(\mathbb{R}^n) \mapsto T^{-1} \in GL(\mathbb{R}^n),$$

as continuidades de ι , df e g implicam dg contínua. Logo, g é de classe \mathcal{C}^1 . Sendo ι , df e g de classe \mathcal{C}^1 , o mesmo vale para dg . Com isso, g é de classe \mathcal{C}^2 . Repetindo o argumento sucessivamente, vemos que g é de classe \mathcal{C}^k . \square

Conseqüentemente, para mostrar o teorema é suficiente provar que existem vizinhanças $V \subseteq U$ e $W \subseteq \mathbb{R}^n$ de 0 tais que $f : V \rightarrow W$ é um homeomorfismo.

A primeira dificuldade que encontramos é determinar uma vizinhança W de 0 contida em $f(U)$. Isso equivale a encontrar uma vizinhança W de 0 tal que $\forall y \in W$ a equação

$$y = f(x) \tag{A.1}$$

admite uma solução $x \in U$. Dado $y \in \mathbb{R}^n$ qualquer, a equação (1) é equivalente a

$$x = y - f(x) + x. \tag{A.2}$$

Definindo $\Phi_y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\Phi_y(x) = y - f(x) + x,$$

vemos que Φ_y possui a mesma classe de diferenciabilidade de f , que $\forall x \in U$

$$d(\Phi_y)_x = -df_x + \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

e que resolver (A.2) para $x \in U$ é equivalente a encontrar um ponto fixo para Φ_y . Uma das ferramentas mais úteis para se fazer isso é o seguinte resultado:

Teorema A.3 (Ponto Fixo de Banach). *Seja M um espaço métrico completo e $f : M \rightarrow M$ uma função para a qual existe $K \in (0, 1)$ tal que*

$$d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y), \quad \forall x, y \in M,$$

ou seja, f é uma contração. Então, f admite um único ponto fixo.

A demonstração deste fato pode ser vista em qualquer livro de Análise, como (LIMA, 2003). Para podermos aplicar este teorema ao nosso problema, precisamos do seguinte:

- Uma vizinhança de 0 em U que seja um subespaço métrico completo de \mathbb{R}^n : qualquer bola fechada $\overline{B(0, r)} \subseteq U$ com $r > 0$ serve.
- A imagem desta vizinhança pela função Φ_y deve estar contida nela mesma, isto é,

$$\Phi_y \left(\overline{B(0, r)} \right) \subseteq \overline{B(0, r)}.$$

- A função $\Phi_y : \overline{B(0, r)} \rightarrow \overline{B(0, r)}$ deve ser uma contração, ou seja, deve existir $K \in (0, 1)$ tal que

$$\|\Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|, \quad \forall x_1, x_2 \in \overline{B(0, r)}.$$

Vamos analisar, primeiro, a terceira condição, pois ela é a mais específica e pode nos fornecer mais informações. Dado $r > 0$ tal que $\overline{B(0, r)} \subseteq U$, tome $x_1, x_2 \in \overline{B(0, r)}$. Pela Desigualdade do Valor Médio¹,

$$\begin{aligned} \|\Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2)\| &\leq \left(\max_{x \in \overline{B(0, r)}} \|d(\Phi_y)_x\| \right) \|x_1 - x_2\| \\ &\leq \left(\max_{x \in \overline{B(0, r)}} \|df_x - \text{id}_{\mathbb{R}^n}\| \right) \|x_1 - x_2\|. \end{aligned}$$

Como $df_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ e $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E)$ é contínua, dado $K > 0$ qualquer, existe $r > 0$ tal que $\overline{B(0, r)} \subseteq U$ e que $\forall x \in \overline{B(0, r)}$

$$\|df_x - df_0\| = \|df_x - \text{id}_{\mathbb{R}^n}\| \leq K.$$

Isso implica, em particular, que

$$\max_{x \in \overline{B(0, r)}} \|df_x - \text{id}_{\mathbb{R}^n}\| \leq K,$$

de modo que, ao tomarmos $0 < K < 1$, temos $\forall x_1, x_2 \in \overline{B(0, r)}$

$$\|\Phi_y(x_1) - \Phi_y(x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|, \quad 0 < K < 1.$$

Isso resolve o primeiro e o terceiro pontos.

Para o segundo, primeiro note que $\forall x \in \overline{B(0, r)}$

$$\|\Phi_y(x)\| = \|y - f(x) + x\|.$$

¹Este resultado afirma que, se f é uma função de classe \mathcal{C}^1 definida num *convexo* e tal que $\|df_x\| \leq K$, $\forall x$, para algum $K > 0$, então, dados x_1, x_2 quaisquer, temos que $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq K \|x_1 - x_2\|$.

Desta igualdade, é imediato que, para resolvermos o segundo ponto, precisamos fazer alguma exigência sobre y , o que, até agora, não fizemos. Usando a Desigualdade do Valor Médio mais uma vez, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Phi_y(x)\| &= \|y - f(x) + x\| \\ &\leq \|y\| + \|(f(x) - x) - (f(0) - 0)\| \\ &\leq \|y\| + \left(\max_{x \in \overline{B(0,r)}} \|df_x - \text{id}_{\mathbb{R}^n}\| \right) \|x\| \\ &\leq \|y\| + Kr. \end{aligned}$$

Portanto, para fazermos $\|\Phi_y(x)\| \leq r$, é suficiente que

$$\|y\| + Kr \leq r \Leftrightarrow \|y\| \leq r(1 - K),$$

com $0 < r(1 - K) < r$, pois $0 < K < 1$. Note que, se $\|y\| < r(1 - K)$, então $\|\Phi_y(x)\| < r$. Essa discussão pode ser resumida no seguinte resultado:

Proposição A.4. *Dado $0 < K < 1$, existe $r > 0$ tal que:*

- (a) $\overline{B(0, r)} \subseteq U$;
- (b) $\|df_x - \text{id}_{\mathbb{R}^n}\| \leq K, \forall x \in \overline{B(0, r)}$;
- (c) Se $\|y\| \leq r(1 - K)$, então $\Phi_y(\overline{B(0, r)}) \subseteq \overline{B(0, r)}$;
- (d) Se $\|y\| < r(1 - K)$, então $\Phi_y(\overline{B(0, r)}) \subseteq B(0, r)$;
- (e) $\Phi_y : \overline{B(0, r)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma contração, $\forall y \in \mathbb{R}^n$.

Seja $y \in \overline{B(0, r(1 - K))}$. Pelas partes (c) e (e) da proposição, a função

$$\Phi_y : \overline{B(0, r)} \longrightarrow \overline{B(0, r)}$$

está bem-definida e é uma contração, do que segue que existe um único $x_y \in \overline{B(0, r)}$ tal que $\Phi_y(x_y) = x_y$, ou seja, tal que

$$f(x_y) = y.$$

Além disso, o item (d) implica que, se $y \in B(0, r(1 - K))$, então $x_y \in B(0, r)$. Sejam

$$\begin{aligned} W &= B(0, r(1 - K)) \\ V &= B(0, r) \cap f^{-1}(W). \end{aligned}$$

Então, $V \subseteq U$ e $W \subseteq \mathbb{R}^n$ são vizinhanças de 0 tais que:

Proposição A.5. *$f : V \rightarrow W$ é uma bijeção de classe \mathcal{C}^k .*

Uma vez que df_x é invertível para todo $x \in U$, o que vale, em particular, para $x \in V$, pela proposição A.2 só falta mostrar que $f^{-1} : W \rightarrow V$ é contínua. De fato, observe que, dados $x_1, x_2 \in V$, temos

$$\begin{aligned} \|f(x_1) - f(x_2)\| &= \|(x_1 - x_2) + [(f(x_1) - x_1) - (f(x_2) - x_2)]\| \\ &\geq \|x_1 - x_2\| - \|(f(x_1) - x_1) - (f(x_2) - x_2)\| \\ &\geq \|x_1 - x_2\| - \left(\max_{x \in V} \|df_x - \text{id}_{\mathbb{R}^n}\| \right) \|x_1 - x_2\| \\ &\geq (1 - K) \|x_1 - x_2\|, \end{aligned}$$

isto é,

$$\|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{1 - K} \|f(x_1) - f(x_2)\|, \quad \forall x_1, x_2 \in V.$$

Portanto, dados $y_1, y_2 \in W$ quaisquer,

$$\|f^{-1}(y_1) - f^{-1}(y_2)\| \leq \frac{1}{1 - K} \|y_1 - y_2\|,$$

o que mostra que f^{-1} é contínua e completa a demonstração do teorema.

Uma consequência importante do Teorema da Função Inversa (que lhe é, na verdade, equivalente) é o Teorema da Função Implícita, que mostraremos a seguir. Antes, um pouco de notação. Dada $f : U \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^s$ uma função diferenciável em $p \in U$, em que U é um aberto, defina

$$\begin{aligned} d_1 f_p &: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s \\ d_2 f_p &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s \end{aligned}$$

por

$$\begin{aligned} d_1 f_p(h) &= df_p(h, 0) \\ d_2 f_p(k) &= df_p(0, k). \end{aligned}$$

Estas funções são obviamente lineares, e, para cada $(h, k) \in \mathbb{R}^{m+n}$, temos

$$df_p(h, k) = d_1 f_p(h) + d_2 f_p(k).$$

Teorema A.6 (Função Implícita). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe \mathcal{C}^k e $p = (p_0, q_0) \in U$ tal que $d_2 f_p \in GL(\mathbb{R}^n)$. Então, existem vizinhanças $V \subseteq \mathbb{R}^m$ de p_0 e $W \subseteq U$ de p e uma função $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^k tais que*

$$W \cap f^{-1}(\{f(p)\}) = \{(x, \phi(x)) : x \in V\}.$$

Ademais,

$$d\phi_{p_0} = -(d_2 f_p)^{-1} \circ d_1 f_p.$$

Observação: Este teorema² significa, em essência, que, dadas certas condições a respeito de f , o conjunto dos pontos $(x, y) \in U$ tais que $f(x, y) = f(p)$ pode, numa vizinhança de p , ser descrito como o gráfico de uma função $y = y(x)$. Outra interpretação é que a equação $f(x, y) = f(p)$ pode ser “resolvida” para y em termos de x .

Demonstração. Considere a função $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ dada por

$$F(x, y) = (x, f(x, y)).$$

Então, F é de classe \mathcal{C}^k e

$$dF_p(h, k) = (h, df_p(h, k)) = (h, d_1f_p(h) + d_2f_p(k)).$$

Dado $(h, k) \in \ker(dF_p)$, temos da equação acima que $h = 0$, donde

$$0 = d_1f_p(h) + d_2f_p(k) = d_2f_p(k) \Rightarrow k = 0,$$

pois $d_2f_p \in GL(\mathbb{R}^n)$. Com isso, $\ker(dF_p) = \{0\}$, de modo que $dF_p \in GL(\mathbb{R}^{m+n})$. Isto implica a existência de vizinhanças $W' \subseteq U$ de p e $V' \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ de $F(p)$ tais que $F : W' \rightarrow V'$ é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k . Como $F(p) = (p_0, f(p))$ e V' é aberto, existem $V \subseteq \mathbb{R}^m$ e $S \subseteq \mathbb{R}^n$ abertos tais que $p_0 \in V$, $f(p) \in S$ e $V \times S \subseteq V'$. Tome $W = F^{-1}(V \times S)$, e note que $p \in W$.

Defina $\phi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\phi(x) = \pi_2 \circ F^{-1}(x, f(p)),$$

em que $\pi_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^{m+n} \mapsto y \in \mathbb{R}^n$. Observe que ϕ é de classe \mathcal{C}^k . Para mostrar que

$$W \cap f^{-1}(\{f(p)\}) = \{(x, \phi(x)) : x \in V\},$$

primeiro tome $x \in V$. Uma vez que $f(p) \in S$, temos que $(x, f(p)) \in V \times S$. Disso segue que $F^{-1}(x, f(p)) \in W$. Além disso, escrevendo $F^{-1}(x, f(p)) = (\tilde{x}, \tilde{y})$, vemos duas coisas:

- $\tilde{y} = \pi_2 \circ F^{-1}(x, f(p)) = \phi(x)$;
- $(x, f(p)) = F \circ F^{-1}(x, f(p)) = F(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\tilde{x}, f(\tilde{x}, \tilde{y})) \Rightarrow x = \tilde{x}$ e $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(p)$.

Portanto,

$$F^{-1}(x, f(p)) = (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x, \phi(x)),$$

e temos $(x, \phi(x)) \in W$. Além disso, do segundo item acima também segue que

$$f(x, \phi(x)) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) = f(p).$$

Conseqüentemente,

$$(x, \phi(x)) \in W \cap f^{-1}(\{f(p)\}).$$

Agora, seja $(x, y) \in W \cap f^{-1}(\{f(p)\})$. Isso significa que

²Já se conhecia este resultado desde os tempos de Newton, Leibniz e Euler. No entanto, somente na década de 1870 uma demonstração rigorosa foi apresentada pelo matemático italiano Ulisse Dini, em seu livro *Lezioni di Analisi Infinitesimale*. Até hoje este resultado é conhecido na Itália, assim como em outros lugares do mundo, como *Teorema de Dini*.

- $F(x, y) = (x, f(x, y)) \in V \times S$;
- $f(x, y) = f(p)$.

Da primeira condição vem que $x \in V$ e que $y = \pi_2 \circ F^{-1}(x, f(x, y))$. Da segunda, temos

$$\begin{aligned} y &= \pi_2 \circ F^{-1}(x, f(x, y)) \\ &= \pi_2 \circ F^{-1}(x, f(p)) \\ &= \phi(x). \end{aligned}$$

Isso verifica que $(x, y) = (x, \phi(x))$, com $x \in V$.

Por fim, diferenciando a equação

$$f(x, \phi(x)) = f(p)$$

em relação a x , obtemos

$$d_1 f_{(x, \phi(x))} + d_2 f_{(x, \phi(x))} \circ d\phi_x = 0.$$

Fazendo $x = p_0$, temos

$$d_1 f_p + d_2 f_p \circ d\phi_{p_0} = 0,$$

e o fato de $d_2 f_p$ ser invertível garante que podemos isolar $d\phi_{p_0}$ nesta equação, obtendo a identidade desejada. \square

Apêndice B

Álgebras de Lie

Neste apêndice, fazemos uma descrição mais detalhada de uma estrutura algébrica que se mostrou muito importante ao longo deste trabalho, as álgebras de Lie. Para manter a discussão mais sucinta, assumimos que o leitor já esteja familiarizado com os elementos básicos da álgebra linear e da teoria de grupos e anéis, principalmente no que se refere às subestruturas, homomorfismos e quocientes.

Começamos fazendo uma definição.

Definição B.1. *Seja \mathbb{K} um corpo. Dizemos que um \mathbb{K} -espaço vetorial A é uma álgebra sobre \mathbb{K} se existe, além da estrutura vetorial em A , uma operação*

$$* : A \times A \longrightarrow A$$

que satisfaz $\forall a, b, c \in A$ e $\forall k \in \mathbb{K}$:

$$(i) \quad a * (b + c) = a * b + a * c;$$

$$(ii) \quad (a + b) * c = a * c + b * c;$$

$$(iii) \quad k(a * b) = (ka) * b = a * (kb).$$

*Uma subálgebra de A é um subconjunto $A' \subseteq A$ tal que $a + b, a * b, ka \in A'$, $\forall a, b \in A'$, $\forall k \in \mathbb{K}$. Um ideal de A é uma subálgebra A' de A tal que $a * b, b * a \in A'$, $\forall a \in A'$, $\forall b \in A$.*

Dadas A, B álgebras sobre \mathbb{K} , uma função $T : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras se T é linear e:

$$T(a * b) = T(a) * T(b), \quad \forall a, b \in A.$$

O núcleo de um homomorfismo $f : A \rightarrow B$ é o conjunto $\ker(f) := f^{-1}(\{0\})$.

Observações:

- 1) Vamos assumir que \mathbb{K} é um corpo de característica nula, i.e., se $n \in \mathbb{N}$ é tal que $nk = 0$ para algum $k \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, então $n = 0$.

- 2) Poderíamos, no lugar de \mathbb{K} , colocar um anel R com unidade. No entanto, tal generalização dá origem a dificuldades técnicas que apenas nos atrapalharão.
- 3) Não é difícil mostrar que o núcleo de um homomorfismo de álgebras é um ideal do domínio.
- 4) Todos os resultados a respeito de subestruturas, homomorfismos, quocientes, etc, normalmente vistos para anéis, grupos e espaços vetoriais também valem para álgebras, com demonstrações muito semelhantes.
- 5) É comum encontrar definições do conceito de álgebra que declaram mais uma propriedade: a associatividade de $*$. No entanto, as álgebras de Lie, como veremos, são, em geral, não-associativas. As álgebras cuja operação $*$ é associativa são chamadas de *álgebras associativas*.

Exemplo B.2. Todo corpo pode ser considerado como uma álgebra (associativa) sobre si mesmo. \triangle

Exemplo B.3. Sejam \mathbb{K} um corpo e X um conjunto não-vazio qualquer. Defina $F(X, \mathbb{K})$ como o conjunto de todas as funções $f : X \rightarrow \mathbb{K}$. Dados $f, g \in F(X, \mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{K}$, defina $f + g, f * g, kf$ por:

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x), \forall x \in X \\ (f * g)(x) &= f(x)g(x), \forall x \in X \\ (kf)(x) &= kf(x), \forall x \in X.\end{aligned}$$

Não é difícil ver que, com estas operações, $F(X, \mathbb{K})$ é uma álgebra associativa sobre \mathbb{K} . \triangle

Exemplo B.4. Generalizando o exemplo anterior, o conjunto $F(X, A)$, em que A é uma álgebra sobre \mathbb{K} e X é um conjunto não-vazio, é uma álgebra sobre \mathbb{K} com as operações pontualmente definidas. \triangle

Exemplo B.5. Sejam E um espaço vetorial sobre \mathbb{K} e $\mathcal{L}(E)$ o conjunto dos operadores lineares em E . Considerando em $\mathcal{L}(E)$ as operações usuais, é fácil ver que $\mathcal{L}(E)$ é uma álgebra associativa sobre \mathbb{K} . \triangle

Exemplo B.6. Dado um espaço vetorial E sobre \mathbb{K} , considere $L(E)$ com a estrutura de álgebra mencionada no exemplo anterior. Defina $\forall f, g \in L(E)$ o *colchete de Lie* $[f, g]$ por

$$[f, g](x) = f(g(x)) - g(f(x)),$$

i.e., $[f, g] = fg - gf$. Esta operação está bem-definida, e a verificação de que ela satisfaz aos axiomas é puramente operacional. Mostremos, para ilustrar,

que $[f + g, h] = [f, h] + [g, h]$. De fato,

$$\begin{aligned} [f + g, h] &= (f + g)h - h(f + g) \\ &= fh + gh - hf - hg \\ &= (fh - hf) + (gh - hg) \\ &= [f, h] + [g, h]. \end{aligned}$$

Esta álgebra é denotada por $\mathfrak{gl}(E)$. \triangle

Exemplo B.7. Generalizando o exemplo anterior, seja A uma álgebra associativa sobre \mathbb{K} . Defina $\forall a, b \in A$

$$[a, b] = a * b - b * a.$$

A verificação de que isto define uma estrutura de álgebra em A segue o exemplo anterior. Para evitar confusões com a operação associativa que A possui, com este segundo produto denotaremos a álgebra A por \mathfrak{a} . \triangle

A álgebra definida no exemplo anterior possui duas propriedades que não estão listadas na definição, pois são mais específicas. A primeira é imediata: $\forall a, b \in \mathfrak{a}$

$$[a, b] = a * b - b * a = -(b * a - a * b) = -[b, a].$$

Esta propriedade é adequadamente chamada de *antisimetria*. Como consequência dela e do fato de \mathbb{K} possuir característica nula, temos

$$[a, b] = [b, a] \Leftrightarrow [a, b] = -[a, b] \Leftrightarrow 2[a, b] = 0 \Leftrightarrow [a, b] = 0.$$

Isso mostra que, a menos que $[\ , \] = 0$, a álgebra \mathfrak{a} não é comutativa. Por outro lado, se $a, b \in \mathfrak{a}$ são tais que $[a, b] = 0$, então

$$0 = [a, b] = a * b - b * a \Leftrightarrow a * b = b * a.$$

Portanto, $\forall a, b \in \mathfrak{a}$

$$[a, b] = 0 \Leftrightarrow a * b = b * a,$$

o que significa que \mathfrak{a} é comutativa sse A também é.

A outra propriedade envolve a associatividade de \mathfrak{a} . Note que o fato de que $[a, a] = 0$, $\forall a \in \mathfrak{a}$, junto com a bilinearidade de $[\ , \]$, implica $[[a, a], b] = 0$, $\forall a, b \in \mathfrak{a}$. No entanto, nem sempre temos $[a, [a, b]] = 0$, como veremos num exemplo mais adiante. Então, de maneira geral,

$$[[a, b], c] \neq [a, [b, c]].$$

Apesar disto, podemos “medir” o quanto \mathfrak{a} não é associativa: basta tomar

$a, b, c \in \mathfrak{a}$ e computar $[[a, b], c] - [a, [b, c]]$. Façamos isso:

$$\begin{aligned}
 [[a, b], c] - [a, [b, c]] &= [a * b - b * a, c] - [a, b * c - c * b] \\
 &= (a * b - b * a) * c - c * (a * b - b * a) - \\
 &\quad - a * (b * c - c * b) + (b * c - c * b) * a \\
 &= (a * b) * c - (b * a) * c - c * (a * b) + c * (b * a) \\
 &\quad - a * (b * c) + a * (c * b) + (b * c) * a - (c * b) * a \\
 &= (\star).
 \end{aligned}$$

Usando a associatividade¹ de A , podemos escrever

$$\begin{aligned}
 (\star) &= a * b * c - b * a * c - c * a * b + c * b * a - \\
 &\quad - a * b * c + a * c * b + b * c * a - c * b * a \\
 &= b * c * a - b * a * c - c * a * b + a * c * b \\
 &= b * (c * a - a * c) - (c * a - a * c) * b \\
 &= [b, [c, a]].
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$[[a, b], c] - [a, [b, c]] = [b, [c, a]].$$

Usando a antisimetria de $[\ , \]$, podemos reescrever esta equação da seguinte forma:

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0,$$

a chamada *identidade de Jacobi*.

Definição B.8. Uma álgebra de Lie sobre o corpo \mathbb{K} é uma \mathbb{K} -álgebra \mathfrak{g} cujo produto $[\ , \]$ satisfaz $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

- (i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (antisimetria);
- (ii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi).

Usando a antisimetria, a identidade de Jacobi pode ser reescrita de duas outras maneiras:

$$\begin{aligned}
 [Z, [X, Y]] &= [[Z, X], Y] + [X, [Z, Y]] \\
 [[X, Y], Z] &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]].
 \end{aligned}$$

Num \mathbb{K} -espaço vetorial E , uma operação bilinear, antisimétrica e que satisfaz à identidade de Jacobi é chamada de colchete de Lie em E .

Observação: De maneira geral, nos exemplos apresentados, a estrutura vetorial num dado conjunto é bastante óbvia. Então, para definirmos uma estrutura de álgebra de Lie neste espaço vetorial é suficiente fornecer um colchete de Lie.

¹Esse é o motivo por que, no exemplo anterior, escolhemos A uma álgebra associativa, e não uma álgebra qualquer.

Exemplo B.9. Segue da discussão que fizemos que, sempre que A é uma álgebra associativa, tem-se que \mathfrak{a} é uma álgebra de Lie com o colchete

$$[a, b] = a * b - b * a.$$

Em particular, se E é um \mathbb{K} -espaço vetorial, então $\mathfrak{gl}(E)$ é uma álgebra de Lie. \triangle

Exemplo B.10. Considere o \mathbb{R} -espaço vetorial \mathbb{R}^3 com o colchete

$$[u, v] = (u^2v^3 - u^3v^2, u^3v^1 - u^1v^3, u^1v^2 - u^2v^1) = u \times v.$$

Tomando (e_1, e_2, e_3) a base canônica de \mathbb{R}^3 , podemos escrever

$$[u, v] = \begin{vmatrix} u^2 & u^3 \\ v^2 & v^3 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} u^1 & u^3 \\ v^1 & v^3 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix} e_3,$$

e desta expressão é fácil ver que $[\cdot, \cdot]$ é bilinear e antisimétrica. Para mostrar a identidade de Jacobi, tome $u, v, w \in \mathbb{R}^3$. Então:

$$\begin{aligned} [[u, v], w] &= [(u^2v^3 - u^3v^2, u^3v^1 - u^1v^3, u^1v^2 - u^2v^1), w] \\ &= ((u^3v^1 - u^1v^3)w^3 - (u^1v^2 - u^2v^1)w^2, \\ &\quad (u^1v^2 - u^2v^1)w^1 - (u^2v^3 - u^3v^2)w^3, \\ &\quad (u^2v^3 - u^3v^2)w^2 - (u^3v^1 - u^1v^3)w^1) \\ &= (u^3v^1w^3 - u^1v^3w^3 - u^1v^2w^2 + u^2v^1w^2, \\ &\quad u^1v^2w^1 - u^2v^1w^1 - u^2v^3w^3 + u^3v^2w^3, \\ &\quad u^2v^3w^2 - u^3v^2w^2 - u^3v^1w^1 + u^1v^3w^1). \end{aligned}$$

Permutando ciclicamente os símbolos u, v, w , obtemos também:

$$\begin{aligned} [[v, w], u] &= (v^3w^1u^3 - v^1w^3u^3 - v^1w^2u^2 + v^2w^1u^2, \\ &\quad v^1w^2u^1 - v^2w^1u^1 - v^2w^3u^3 + v^3w^2u^3, \\ &\quad v^2w^3u^2 - v^3w^2u^2 - v^3w^1u^1 + v^1w^3u^1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [[w, u], v] &= (w^3u^1v^3 - w^1u^3v^3 - w^1u^2v^2 + w^2u^1v^2, \\ &\quad w^1u^2v^1 - w^2u^1v^1 - w^2u^3v^3 + w^3u^2v^3, \\ &\quad w^2u^3v^2 - w^3u^2v^2 - w^3u^1v^1 + w^1u^3v^1). \end{aligned}$$

Somar estas três equações fornece a igualdade desejada. Note que esta álgebra não é comutativa, pois $[e_1, e_2] = e_3 \neq 0$. Além disso, ela também não é associativa, pois, como já sabemos, $[[e_1, e_1], e_2] = 0$ e, no entanto,

$$[e_1, [e_1, e_2]] = [e_1, e_3] = -e_2 \neq 0.$$

\triangle

Exemplo B.11. Dado $n \in \mathbb{N}^*$, considere o espaço vetorial real $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n})$. Denotando os elementos de \mathbb{R}^{2n} por (p, q) , com $p, q \in \mathbb{R}^n$, defina

$$\{, \} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n})$$

por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p^i},$$

o chamado *parêntese de Poisson*. Vamos mostrar que $\{, \}$ é um colchete de Lie em $\mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n})$.

A bilinearidade e antisimetria são imediatas da definição. Para ver que satisfaz a identidade de Jacobi, primeiro observe que $\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{f, g\}}{\partial p^j} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial p^j} \left(\frac{\partial f}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^i} \right) - \frac{\partial}{\partial p^j} \left(\frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p^i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p^j \partial p^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^i} + \frac{\partial f}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial p^j \partial q^i} - \frac{\partial^2 f}{\partial p^j \partial q^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial p^j \partial p^i}, \end{aligned}$$

e, analogamente, que

$$\frac{\partial \{f, g\}}{\partial q^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial p^k} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^k} + \frac{\partial f}{\partial p^k} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial q^j \partial q^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p^k} - \frac{\partial f}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial q^j \partial p^k}.$$

Portanto, dados $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{2n})$, temos

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, h\} &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial \{f, g\}}{\partial p^j} \cdot \frac{\partial h}{\partial q^j} - \frac{\partial \{f, g\}}{\partial q^j} \cdot \frac{\partial h}{\partial p^j} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial p^j \partial p^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial h}{\partial q^j} + \frac{\partial f}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial p^j \partial q^i} \cdot \frac{\partial h}{\partial q^j} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial p^j \partial q^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial h}{\partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial p^j \partial p^i} \cdot \frac{\partial h}{\partial q^j} \right) - \\ &\quad - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial p^k} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial h}{\partial p^j} + \frac{\partial f}{\partial p^k} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial q^j \partial q^k} \cdot \frac{\partial h}{\partial p^j} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p^k} \cdot \frac{\partial h}{\partial p^j} - \frac{\partial f}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial q^j \partial p^k} \cdot \frac{\partial h}{\partial p^j} \right). \end{aligned}$$

Procedendo de maneira semelhante, obtemos

$$\begin{aligned} \{\{g, h\}, f\} &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial p^j \partial p^i} \cdot \frac{\partial h}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q^j} + \frac{\partial g}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial p^j \partial q^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q^j} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 g}{\partial p^j \partial q^i} \cdot \frac{\partial h}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q^j} - \frac{\partial g}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial p^j \partial p^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q^j} \right) - \\ &\quad - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial q^j \partial p^k} \cdot \frac{\partial h}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial f}{\partial p^j} + \frac{\partial g}{\partial p^k} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial q^j \partial q^k} \cdot \frac{\partial f}{\partial p^j} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 g}{\partial q^j \partial q^k} \cdot \frac{\partial h}{\partial p^k} \cdot \frac{\partial f}{\partial p^j} - \frac{\partial g}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial q^j \partial p^k} \cdot \frac{\partial f}{\partial p^j} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \{\{h, f\}, g\} &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial p^j \partial p^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^j} + \frac{\partial h}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial p^j \partial q^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^j} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 h}{\partial p^j \partial q^i} \cdot \frac{\partial f}{\partial p^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^j} - \frac{\partial h}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial p^j \partial p^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^j} \right) - \\ &\quad - \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial q^j \partial p^k} \cdot \frac{\partial f}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p^j} + \frac{\partial h}{\partial p^k} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial q^k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p^j} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 h}{\partial q^j \partial q^k} \cdot \frac{\partial f}{\partial p^k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p^j} - \frac{\partial h}{\partial q^k} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial q^j \partial p^k} \cdot \frac{\partial g}{\partial p^j} \right). \end{aligned}$$

A partir destas equações pode-se concluir, com algum trabalho, que

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0,$$

como queríamos. \triangle

Vamos, agora, analisar uma família importante de álgebras de Lie, que aparece frequentemente na Geometria. Antes disso, uma definição:

Definição B.12. *Seja A uma álgebra sobre \mathbb{K} . Uma derivação em A é uma função linear $f : A \rightarrow A$ tal que:*

$$f(a * b) = f(a) * b + a * f(b), \quad \forall a, b \in A.$$

Esta equação é chamada regra do produto, ou regra de Leibniz. O conjunto das derivações em A é denotado por $\mathfrak{der}(A)$.

Observe que o fato de toda derivação ser linear implica $\mathfrak{der}(A) \subseteq \mathfrak{gl}(A)$. Mais precisamente:

Proposição B.13. *$\mathfrak{der}(A)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$.*

Demonstração. Dados $f, g \in \mathfrak{der}(A)$ e $k \in \mathbb{K}$, precisamos mostrar que $f + kg, [f, g] \in \mathfrak{der}(A)$. Como $f + kg$ e $[f, g]$ são lineares, isso se resume a mostrar a regra de Leibniz. Tome $a, b \in A$:

$$\begin{aligned} (f + kg)(a * b) &= f(a * b) + kg(a * b) \\ &= f(a) * b + a * f(b) + kg(a) * b + ka * g(b) \\ &= (f + kg)(a) * b + a * (f + kg)(b), \end{aligned}$$

e temos que $f + kg \in \mathfrak{der}(A)$. Além disso,

$$\begin{aligned} [f, g](a * b) &= fg(a * b) - gf(a * b) \\ &= f(g(a) * b + a * g(b)) - g(f(a) * b + a * f(b)) \\ &= fg(a) * b + g(a) * f(b) + f(a) * g(b) + a * fg(b) - \\ &\quad - gf(a) * b - f(a) * g(b) - g(a) * f(b) - a * gf(b) \\ &= fg(a) * b - gf(a) * b + a * fg(b) - a * gf(b) \\ &= [f, g](a) * b + a * [f, g](b), \end{aligned}$$

o que mostra que $[f, g] \in \mathfrak{der}(A)$. \square

Exemplo B.14. Seja M uma variedade diferenciável m -dimensional. Sabemos do capítulo 2 que $\mathcal{F}(M)$, o conjunto das funções diferenciáveis reais definidas em M , possui uma estrutura natural de álgebra sobre \mathbb{R} . Mostramos também que os \mathbb{R} -espaços vetoriais $\mathfrak{der}(\mathcal{F}(M))$ e $\mathfrak{X}(M)$ são isomorfos, o que nos permite definir um colchete de Lie em $\mathfrak{X}(M)$ de modo que as álgebras de Lie sejam isomorfas. Este isomorfismo, sendo natural, muitas vezes é considerado como uma igualdade. \triangle

Sejam \mathfrak{g} uma álgebra de Lie e $Z \in \mathfrak{g}$. Defina $\text{ad}(Z) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ por $\text{ad}(Z)X = [Z, X]$. Decorre da bilinearidade de $[\cdot, \cdot]$ que $\text{ad}(Z)$ é linear, e da identidade de Jacobi que $\text{ad}(Z)$ é uma derivação. Verifiquemos esta última afirmação. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, temos:

$$\begin{aligned} \text{ad}(Z)[X, Y] &= [Z, [X, Y]] \\ &= [[Z, X], Y] + [X, [Z, Y]] \\ &= [\text{ad}(Z)(X), Y] + [X, \text{ad}(Z)(Y)]. \end{aligned}$$

Definição B.15. Dada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , uma derivação em \mathfrak{g} que é da forma $\text{ad}(Z)$, para algum $Z \in \mathfrak{g}$, é chamada de derivação interna.

Uma questão importante no estudo das álgebras de Lie é determinar em que condições todas as derivações de \mathfrak{g} são internas. Para mais informações, veja (SAN MARTIN, 1999).

As álgebras de Lie mais importantes são as subálgebras de $\mathfrak{gl}(E)$, em que E é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Isso se deve aos seguintes fatos:

- Seus elementos são transformações lineares, que podem se representadas por matrizes sempre que E tem dimensão finita.
- O colchete de Lie destas álgebras é muito simples, dado por

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Deste modo, seria muito conveniente se qualquer álgebra de Lie \mathfrak{g} fosse isomorfa a $\mathfrak{gl}(E)$, para algum espaço vetorial E , ou, pelo menos, a uma subálgebra. Esta discussão motiva a seguinte definição:

Definição B.16. Uma representação de uma álgebra de Lie \mathfrak{g} é um homomorfismo de álgebras $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(E)$, em que E é um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Se T é injetiva, caso em que \mathfrak{g} é isomorfa a uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(E)$, dizemos que T é fiel. A dimensão da representação T é a dimensão de E .

A questão exposta acima se traduz, nesta terminologia, na busca de teoremas da seguinte forma:

“Se \mathfrak{g} é uma álgebra de Lie que satisfaz _____, então \mathfrak{g} admite uma representação fiel.”

O Teorema de Ado (SAN MARTIN, 1999) mostra que \mathfrak{g} admite uma representação fiel de dimensão finita sempre que $\dim(\mathfrak{g}) < \infty$.

Exemplo B.17. Seja \mathfrak{g} uma álgebra de Lie. Defina $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ por $\text{ad}(X)Y = [X, Y]$. Decorre da bilinearidade de $[,]$ que ad é linear. Além disso, dados $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, temos que

$$\begin{aligned} \text{ad}([X, Y])Z &= [[X, Y], Z] \\ &= [X, [Y, Z]] - [Y, [X, Z]] \\ &= \text{ad}(X)\text{ad}(Y)Z - \text{ad}(Y)\text{ad}(X)Z \\ &= [\text{ad}(X), \text{ad}(Y)]Z, \end{aligned}$$

o que mostra que ad é um homomorfismo. Mais uma vez, usamos, na verificação, a identidade de Jacobi numa de suas formas equivalentes. \triangle

A representação apresentada no exemplo acima é chamada de *representação adjunta* de \mathfrak{g} . O seu núcleo é o conjunto (que é um ideal de \mathfrak{g})

$$\{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\} = \{X \in \mathfrak{g} : [X, Y] = [Y, X], \forall Y \in \mathfrak{g}\},$$

chamado de *centro* da álgebra e denotado por $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Conclui-se facilmente que a representação adjunta de \mathfrak{g} é fiel sse $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{0\}$.

Para concluir este apêndice, vejamos uma condição para que um isomorfismo linear $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ seja um isomorfismo de álgebras de Lie.

Dada uma álgebra de Lie \mathfrak{g} , seja $\{X_i\}_{i \in I}$ uma base² de \mathfrak{g} . Para cada $i, j \in I$, podemos escrever

$$[X_i, X_j] = \sum_{k \in I} \xi_{ij}^k X_k,$$

com $\xi_{ij}^k = 0$ a menos de uma quantidade finita. Os escalares ξ_{ij}^k (que são únicos) são as *constantes de estrutura* de \mathfrak{g} em relação à base escolhida. Observe que da antisimetria de $[\cdot, \cdot]$ vem que $\xi_{ij}^k = -\xi_{ji}^k$, $\forall i, j, k \in I$, o que, em particular, mostra que $\xi_{ij}^k = 0$ sempre que $i = j$. Por causa disso, sempre consideramos $i \neq j$.

As constantes de estrutura são importantes no estudo das álgebras de Lie pois elas determinam, a menos de isomorfismo, uma álgebra de Lie. Mais precisamente:

Proposição B.18. *Sejam $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ álgebras de Lie sobre \mathbb{K} e $\{X_i\}_{i \in I}, \{Y_i\}_{i \in I}$ bases de $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, respectivamente. Se as constantes de estrutura são as mesmas para ambas as bases, então $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}$.*

Demonstração. Seja $T : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ a única transformação linear tal que $T(X_i) = Y_i$, $\forall i \in I$. É imediato que T é um isomorfismo linear. Para que $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}$, é suficiente mostrar que T é um homomorfismo.

Sejam $\xi_{ij}^k \in \mathbb{K}$ as constantes de estrutura de \mathfrak{g} e λ_{ij}^k , de \mathfrak{h} . Dados $Z, \tilde{Z} \in \mathfrak{g}$, escreva

$$\begin{aligned} Z &= \sum_{i \in I} Z^i X_i \Rightarrow T(Z) = \sum_{i \in I} Z^i Y_i \\ \tilde{Z} &= \sum_{j \in I} \tilde{Z}^j X_j \Rightarrow T(\tilde{Z}) = \sum_{j \in I} \tilde{Z}^j Y_j, \end{aligned}$$

por linearidade. Com isso, usando a bilinearidade de $[\cdot, \cdot]$ temos

$$\begin{aligned} [Z, \tilde{Z}] &= \left[\sum_{i \in I} Z^i X_i, \sum_{j \in I} \tilde{Z}^j X_j \right] \\ &= \sum_{i, j \in I} Z^i \tilde{Z}^j [X_i, X_j] \\ &= \sum_{i, j \in I} Z^i \tilde{Z}^j \sum_{k \in I} \xi_{ij}^k X_k \\ &= \sum_{k \in I} \left(\sum_{i, j \in I} Z^i \tilde{Z}^j \xi_{ij}^k \right) X_k. \end{aligned}$$

Disso vem que

$$T[Z, \tilde{Z}] = \sum_{k \in I} \left(\sum_{i, j \in I} Z^i \tilde{Z}^j \xi_{ij}^k \right) Y_k.$$

²Lembre que todo espaço vetorial admite base, mesmo que seja infinita.

Por outro lado, manipulações similares mostram que

$$[T(Z), T(\tilde{Z})] = \sum_{k \in I} \left(\sum_{i, j \in I} Z^i \tilde{Z}^j \lambda_{ij}^k \right) Y_k.$$

Por hipótese $\xi_{ij}^k = \lambda_{ij}^k$, $\forall i, j, k \in I$, o que mostra que

$$T[Z, \tilde{Z}] = [T(Z), T(\tilde{Z})],$$

como queríamos. \square

O seguinte corolário é imediato.

Corolário B.19. *Se \mathfrak{g} e \mathfrak{h} são álgebras de Lie n -dimensionais, com $n \in \mathbb{N}^*$, e têm as mesmas constantes de estrutura com relação a um par de bases, então $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{h}$.*

Exemplo B.20. Considere o espaço \mathbb{R}^3 como álgebra de Lie. Sendo (e_1, e_2, e_3) a base canônica, temos que

$$\begin{aligned} [e_1, e_2] &= e_3 \\ [e_2, e_3] &= e_1 \\ [e_3, e_1] &= e_2. \end{aligned}$$

Com isso, as constantes de estrutura de \mathbb{R}^3 são

$$\xi_{12}^3 = -\xi_{21}^3 = \xi_{23}^1 = -\xi_{32}^1 = \xi_{31}^2 = -\xi_{13}^2 = 1,$$

enquanto $\xi_{ij}^k = 0$ sempre que $i = j$ ou $i = k$ ou $j = k$. Uma maneira alternativa de escrever estas constantes é a seguinte:

$$\xi_{ij}^k = \varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } (ijk) \text{ é permutação par de } (123) \\ -1 & , \text{ se } (ijk) \text{ é permutação ímpar de } (123) \\ 0 & , \text{ caso contrário, i.e., se } i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k. \end{cases}$$

O símbolo ε_{ijk} é conhecido como o *tensor de Levi-Civita*. \triangle

Exemplo B.21. Seja $\mathfrak{so}(3)$ o subconjunto de $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^3)$ formado pelos operadores antisimétricos, i.e.,

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in \mathfrak{gl}(\mathbb{R}^3) : X^* = -X\}.$$

Como \mathbb{R}^3 possui dimensão finita, uma vez fixada uma base (por exemplo, a canônica), podemos pensar nos elementos de $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^3)$ como matrizes; adotando este ponto de vista, temos

$$\mathfrak{so}(3) = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : X^t = -X\},$$

e um elemento genérico de $\mathfrak{so}(3)$ pode ser escrito na forma

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix},$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Afirmamos que $\mathfrak{so}(3)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(\mathbb{R}^3)$, pois claramente é um subespaço vetorial e, dados $X, Y \in \mathfrak{so}(3)$

$$\begin{aligned} [X, Y]^* &= (XY - YX)^* \\ &= Y^*X^* - X^*Y^* \\ &= (-Y)(-X) - (-X)(-Y) \\ &= YX - XY \\ &= [Y, X], \end{aligned}$$

e a afirmação segue da antisimetria do colchete.

A forma geral de um elemento de $\mathfrak{so}(3)$ apresentada acima nos leva a considerar a base (E_1, E_2, E_3) de $\mathfrak{so}(3)$ formada por

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Em particular, $\dim(\mathfrak{so}(3)) = 3$. Observe que

$$\begin{aligned} [E_1, E_2] &= E_1E_2 - E_2E_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= E_3 \end{aligned}$$

e, analogamente, que

$$\begin{aligned} [E_2, E_3] &= E_1 \\ [E_3, E_1] &= E_2. \end{aligned}$$

A partir destas equações, podemos concluir que as constantes de estrutura de $\mathfrak{so}(3)$ com relação a esta base são

$$\xi_{12}^3 = -\xi_{21}^3 = \xi_{23}^1 = -\xi_{32}^1 = \xi_{31}^2 = -\xi_{13}^2 = 1,$$

enquanto $\xi_{ij}^k = 0$ sempre que $i = j$ ou $i = k$ ou $j = k$. Estas são exatamente as constantes de estrutura de \mathbb{R}^3 com relação à base canônica, o que significa que o isomorfismo linear $T : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ determinado por $T(E_i) = e_i$, $i = 1, 2, 3$, é também um homomorfismo de álgebras de Lie. Portanto, $\mathfrak{so}(3)$ e \mathbb{R}^3 são álgebras de Lie isomorfas. \triangle

Referências Bibliográficas

BISHOP, Richard; GOLDBERG, Samuel. *Tensor Analysis on Manifolds*. [S.l.]: Dover Publications, Inc., 1968, 1980.

CARMO, Manfredo Perdigão Do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 1ª. ed. [S.l.]: IMPA, 2005.

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2ª. ed. [S.l.]: Editora da USP, 2005.

EDWARDS, Jr. Charles Henry. *Advanced Calculus of Several Variables*. [S.l.]: Dover Publications, Inc., 1973, 1994.

GARCIA, Arnaldo; LEQUAIN, Yves. *Elementos de Álgebra*. 2ª. ed. [S.l.]: IMPA, 2003.

GONÇALVES, Adilson. *Introdução À Álgebra*. 5ª. ed. [S.l.]: IMPA, 2005.

GUGGENHEIMER, Heinrich W. *Differential Geometry*. 1ª. ed. [S.l.]: Dover Publications, Inc., 1963, 1977.

HALL, Brian C. *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. 1ª. ed. [S.l.]: Springer, 2003.

HANCHE-OLSEN, Harald. The derivative of a determinant.
www.math.ntnu.no/~hanche/notes/diffdet/diffdet-600dpi.ps, 1997.

HIRSCH, Morris; SMALE, Stephen. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. 1ª. ed. [S.l.]: Academic Press, Inc., 1974.

KNAPP, Anthony W. *Lie Groups Beyond an Introduction*. 2ª. ed. [S.l.]: Birkhäuser, 2002.

KREYSZIG, Erwin. *Introductory Functional Analysis With Applications*. 2ª. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1989.

LEE, John M. *Introduction to Smooth Manifolds*. [S.l.]: Springer, 2003.

LIMA, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 5ª. ed. [S.l.]: IMPA, 2001.

LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. 3ª. ed. [S.l.]: IMPA, 2003.

LIMA, Elon Lages. *Análise No Espaço \mathbb{R}^n* . 1^a. ed. [S.l.]: IMPA, 2004.

LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. 8^a. ed. [S.l.]: IMPA, 2005.

NETO, Alcides Lins. *Funções de Uma Variável Complexa*. 2^a. ed. [S.l.]: IMPA, 1996.

ROSSMANN, Wulf. *Lie Groups - An Introduction Through Linear Groups*. [S.l.]: Oxford University Press, 2002.

SAN MARTIN, Luiz Antonio Barrera. *Álgebras de Lie*. 1^a. ed. [S.l.]: Editora da UNICAMP, 1999.

WILLARD, Stephen. *General Topology*. [S.l.]: Dover Publications, Inc., 1970, 2004.